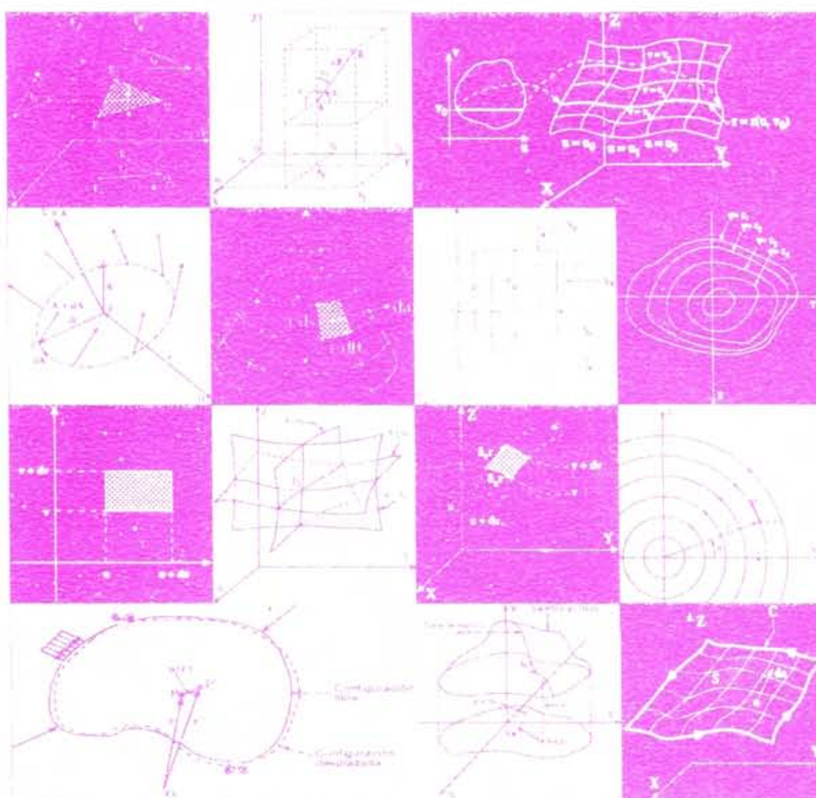
CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES

Abelardo Rodríguez Soria
Hugo Sergio Becerril Hernández
Nicolás Falcón Hernández



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES

CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES

Este material fue dictaminado y aprobado por
el Consejo Editorial de la División de Ciencias
Básicas e Ingeniería, el 29 de marzo de 2000.

CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES

Abelardo Rodríguez Soria
Hugo Sergio Becerril Hernández
Nicolás Falcón Hernández

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

ISBN 970-654-679-0

CORRECCIÓN
Marisela Juárez Capistran

DISEÑO DE PORTADA
Hugo Adrián Ábrego García

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.
Tel. 5318-9222 y 23
Fax 5318-9222

1a. edición, 2000

Impreso en México

CONTENIDO

CAPÍTULO 9. TEOREMAS INTEGRALES

APÉNDICE I. EL TENSOR DE DEFORMACIONES

APÉNDICE II. EL TENSOR DE ESFUERZOS

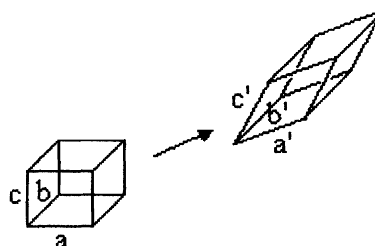
PREFACIO

El plan de estudios de la carrera de Ingeniería Física en la Universidad Autónoma Metropolitana en Azcapotzalco incluye un curso de matemáticas dedicado a los métodos vectoriales, herramientas de gran utilidad en la obtención, expresión y transformación matemática de las leyes físicas. Estos métodos son particularmente útiles en relación con las leyes mecánicas y termodinámicas del medio continuo y las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo.

Las ecuaciones físicas contienen en general tres clases de cantidades que, atendiendo a la cuenta de los números reales empleados para su descripción, se clasifican en *escalares*, *vectores* y *tensores*. De hecho, los escalares y los vectores son casos particulares de los *tensores*. Los escalares son tensores de orden 0, descritos por un número real, y los vectores son tensores de orden 1, descritos por tres números reales o "componentes". Son frecuentes en la física e ingeniería los tensores de orden 2, constituídos por 9 componentes. El elemento unificador del género es la noción de invariabilidad de las cantidades físicas, en el sentido que explicaremos en los Capítulos 3 y 4. Es el concepto de invariabilidad (o "invarianza") el que nos permite conocer más a fondo las propiedades matemáticas de las cantidades físicas, y con ello facilitar su aplicación.

Mencionemos un par de ejemplos de tensores de segundo orden.

Cuando un cuerpo deformable sufre una deformación "infinitesimal", un pequeño prisma rectangular en su seno experimenta un cambio de forma y dimensiones, convirtiéndose en un pequeño paralelepípedo. Para describir esta deformación habría que dar las variaciones de las tres aristas del prisma original, junto con las variaciones de los tres ángulos rectos que conforman dicho prisma.



Para describir la deformación, pues, son necesarios más de 3 números reales. De hecho son 9 números, que forman un tensor de segundo orden denominado el "tensor de deformaciones". Este tensor guarda una relación estrecha con el "tensor de esfuerzos", usado para describir las fuerzas internas en los materiales. Ambas clases de tensores son fundamentales en la mecánica de sólidos y la teoría de la elasticidad y plasticidad.

Las propiedades inerciales de una partícula o punto-masa se describen mediante un escalar, la masa de la partícula. Por otra parte, los cuerpos rígidos (trompos, cohetes, elementos de mecanismos o máquinas, satélites de comunicaciones, etc.) poseen propiedades inerciales más complejas, descritas por un tensor de segundo orden llamado "tensor de inercia". Este tensor interviene en las ecuaciones de movimiento del cuerpo, y en las expresiones de la energía cinética y el momento angular del mismo, como funciones de la velocidad angular.

En muchos de los métodos matemáticos de gran utilidad en la física, como son los teoremas de Gauss y Stokes en sus formas más amplias; la teoría general de los campos vectoriales solenoidales y/o rotacionales; los diversos sistemas de coordenadas de métrica euclídea; la geometría diferencial, etc., son imprescindibles los tensores. Sin embargo, esto es un tema que se prefiere excluir en muchos programas de estudio, sobre todo los de ingeniería. La única razón que se descubre al hacer las cosas de esta manera, "sacándole la vuelta" a los tensores, es evitar la dificultad que afrontan los estudiantes en el manejo de índices, tan característico del álgebra tensorial. Sin embargo, esto es como si se renunciara a estudiar el álgebra de matrices por la misma razón. Basta considerar el producto de 2 matrices de orden 3×3, $\mathsf{A} = (a_{ij})$ y $\mathsf{B} = (b_{ij})$, dado por

$$(\mathsf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$$

para convencerse de que los índices son "ineludibles". En una época pasada también se intentó representar los tensores de segundo orden mediante las "diádicas", bichos algebraicos cuya manipulación pronto se volvía demasiado artificial.

Pero sobre todo, si la manera más *adecuada y natural* de describir una cantidad física es mediante un tensor, ¡pues debe definirse como tensor! Con ello no solamente se gana en *comprensión*, sino que también se pueden aplicar unos métodos de cálculo que les son más naturales a esas cantidades. El álgebra de matrices entra como un *auxiliar* en el manejo matemático de los tensores de segundo orden. Algunos "misterios" que rodean a los conceptos de deformación y esfuerzo en la mecánica de sólidos, tal como se discuten en muchos de los textos estándar de ingeniería, provienen de no tratarlos desde el principio conforme al enfoque matemático más adecuado, y de hecho más práctico, esto es, como tensores.

En este escrito nos limitaremos a los llamados "tensores cartesianos", basados en una métrica euclídea. El tratamiento general no es muy riguroso matemáticamente, sino que se apoya principalmente en la intuición. Se deja al estudiante completar las condiciones bajo las cuales son permitidas algunas operaciones matemáticas.

Es preciso que el estudiante adquiera un buen grado de comprensión de las definiciones, usos y propiedades de los vectores y tensores, así como suficiente habilidad en cuanto a su mecanización matemática. Esperamos que el presente texto contribuya a ello. Hemos discutido con bastante detalle los aspectos conceptuales.

El texto contiene más temas que los que es razonable abarcar en un curso trimestral tipo UAM de 9 créditos, que consta de 30 sesiones de clase de 1.5 horas cada una, más el mismo tiempo de estudio en casa por parte del estudiante. Se incluye un apéndice que trata sobre el tensor de deformaciones.

En este texto se asumen unos conocimientos previos elementales sobre vectores; no obstante, en el capítulo 1 se da un repaso a los principales.

El libro incluye suficientes ejemplos resueltos y problemas a resolver. En las dos primeras referencias citadas abajo se podrá encontrar muchos otros ejemplos y problemas.

Los errores que se colaron a la piñata de los vectores/tensores no son invitados nuestros. Agradeceríamos nos los señalaran, así como también mandaran sus sugerencias a cualquiera de los autores a

Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Azcapotzalco
Departamento de Ciencias Básicas, Cubículos H-341 y H-339
Ave. San Pablo 180, Col. Reynosa-Tamaulipas. C.P. 02200
México, D.F.

O bien a los teléfonos 5318-9507 y -08, o al correo **arodr@prodigy.net.mx**.

Este texto está dedicado, con nuestro agradecimiento, a las generaciones de estudiantes de ingeniería física de la UAM-Azcapotzalco que lo fueron estructurando, y a los Profrs. Violeta Gaftoi, Rubén Lazos y Andrzej Myszkowski, quienes han impartido el curso basándose en unas notas preliminares.

Al Profr. Pedro Pereyra nuestro agradecimiento por sus valiosos comentarios y discusiones académicas en relación con este escrito.

REFERENCIAS

Análisis vectorial y tensores cartesianos
D. E. Bourne y P. C. Kendall
Editorial Limusa, México, 1976

Análisis vectorial
Murray R. Spiegel
Serie Schaum
Editorial McGraw-Hill

Tensorrechnung in analytischer Darstellung
A. Duschek y A. Hochrainer
Vols. I, II, III
Springer Verlag, 1960

CAPÍTULO 1	VECTORES

1.1 INTRODUCCIÓN

En los cursos elementales de física se suele definir el vector en estos términos:

"El vector es una cantidad que posee magnitud, dirección y sentido"

Estos atributos son fáciles de identificar en cantidades físicas familiares como la velocidad y la fuerza, que son vectores. La definición es adecuada en ese nivel elemental.

No es esta, sin embargo, la noción matemática más general de vector. Los vectores son elementos de conjuntos denominados *espacios vectoriales*. Estos espacios poseen una estructura algebraica específica (unas reglas de operación con sus elementos), caracterizada por un sistema de axiomas. Si los elementos se combinan con números reales en una operación de multiplicación, se dice que el espacio vectorial es *real*.

En muchas disciplinas se identifican o diseñan objetos matemáticos cuyas reglas naturales de operación algebráica corresponden a las de un espacio vectorial real. A estos objetos no necesariamente se les asignan propiedades de magnitud, dirección y sentido. Existen espacios vectoriales cuyos elementos (los vectores) son las oscilaciones de un péndulo doble, los coeficientes de los polinomios de grado "n", algún conjunto de polígonos en el plano, etc.

¿Qué tienen los vectores que los hace tan útiles en disciplinas muy diversas? Podríamos citar, entre otras, esta cualidad:

"Todos los vectores de un espacio vectorial real pueden generarse a partir de unos cuantos vectores básicos mediante las operaciones de suma vectorial y producto de vectores por números reales".

Por otra parte, en lo que concierne a la física, las operaciones de suma vectorial y producto de vector por número real corresponden a *leyes físicas*. Por ejemplo, el efecto conjunto de dos fuerzas equivale al de una sóla fuerza que es la suma vectorial de aquellas.

El concepto matemático de vector abarca, por supuesto, los vectores que empleamos en la física y la geometría elemental, los cuales son materializaciones especiales de la noción abstracta. Específicamente, los que denominaremos vectores "físicos" en este escrito serán *ternas ordenadas de números reales* (multiplicados por una unidad de medida física). Estas ternas, denominadas "componentes" del vector, determinan su magnitud, dirección y sentido.

En este capítulo estudiaremos una clase especial de vectores denominados "vectores separación". El objetivo principal es dar un repaso a las operaciones y métodos vectoriales. En el capítulo 2 presentaremos unas aplicaciones geométricas del álgebra vectorial, tras lo cual hablaremos sobre los vectores físicos en el capítulo 3.

1.2 Espacio vectorial real

Para construir un espacio vectorial real "*V*" es menester:

- Definir los elementos del espacio (crear una especie nueva de vectores).
- Definir una relación de *igualdad* de dos elementos.
- Definir una operación de *adición* de dos elementos.
- Definir una operación de *multiplicación* de un elemento por un número real.
- Hacer lo anterior de modo que se satisfagan los axiomas del espacio vectorial real.

Las cuatro primeras tareas son específicas de la clase de espacio vectorial en construcción. Los axiomas son los mismos para todo espacio vectorial real.

He aquí los axiomas del espacio vectorial real (λ, μ, … denotan números reales cualesquiera; **a**, **b**, **c**, … denotan vectores cualesquiera del espacio *V*):

(i) La *suma* de **a** y **b**, indicada con $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, es cerrada y única.

(ii) El *producto de un número real* λ *y un vector* **a**, indicado con $\lambda\mathbf{a}$ ó $\lambda \cdot \mathbf{a}$, es cerrado y único.

(iii) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (conmutatividad de la adición)

(iv) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (asociatividad de la adición)

(v) Existe un elemento de *V*, denotado con **0**, tal que para todo **a**,

$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ (existencia de un elemento nulo)

(vi) Para todo **a** existe un elemento de *V*, denotado con $\mathbf{n}_{\mathbf{a}}$, tal que

$\mathbf{a} + \mathbf{n}_{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ (existencia de un elemento negativo para cada **a**)

(vii) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ (asociatividad del producto)

(viii) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (distributividad 1 del producto)

(ix) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (distributividad 2 del producto)

(x) Para todo **a** se tiene

$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (elemento neutro del producto)

Discusión de los axiomas

Los axiomas anteriores conducen a un álgebra vectorial con mucha semejanza al álgebra de los números reales.

Lo primero que observamos es que no están definidas las operaciones de producto de vectores (algo como **ab**) ni división de vectores (algo como $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$).

En los axiomas anteriores se usa el mismo signo "+" que se emplea en el álgebra de los números reales. Pero no hay riesgo de confusión, porque si el signo "+" enlaza dos vectores [o dos números reales], indica suma vectorial [o suma de reales]. Por ejemplo, se advierte inmediatamente que en el axioma $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, el primer signo "+" indica suma de números reales, el segundo suma vectorial. Lo mismo podemos decir con respecto a los signos "=", " · " y a las barras de valor absoluto ($|\mathbf{a}|$ y $|\lambda|$).

Igualdad

La igualdad $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ significa en particular que en cualquier expresión donde ocurra **a** podemos poner en su lugar **b**, y viceversa. La negación de la igualdad se escribe $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

Si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Para demostrarlo, sustituyamos **b** por **a** en el lado derecho, lo que da la relación $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$. Por el axioma de unicidad de la adición, los vectores en ambos lados de esta relación son uno mismo, QED.

Se deduce que $\mathbf{a} + \mathbf{c} \neq \mathbf{b} + \mathbf{c} \;\Rightarrow\; \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

El recíproco del teorema también es cierto: si $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Para demostrarlo es necesaria una regla que justifique cancelar el vector **c** en ambos miembros de la primera relación. Más adelante emergerá esta regla.

Notación

En ocasiones se escribe el producto $\lambda\,\mathbf{a}$ en la forma $\mathbf{a}\,\lambda$. Convenimos en que ambos símbolos son lo mismo. Ejemplo de ello es sacar de "factor común" una unidad física como "metro" (abreviada "m") en esta forma: $\mathbf{a} = (5\text{m}, -2\text{m}, 0\text{m}) = (5, -2, 0)\ \text{m}$.

El producto de un número negativo y un vector debe indicarse por ahora encerrando el número en un paréntesis, como por ejemplo $(-5)\mathbf{a}$.

La suma de tres vectores puede escribirse sin paréntesis, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, puesto que por el axioma (iv) el resultado es el mismo no importa qué pareja se sume primero. Por inducción matemática se puede extender esta regla a cualquier número de sumandos.

Teorema

Del axioma $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ y de la propiedad de conmutatividad del producto de números reales se sigue que $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a})$. Así que huelgan los paréntesis en

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda\,\mu\,\mathbf{a}$$

En los axiomas (v) y (vi) se exige que exista *al menos un* elemento nulo del espacio y *al menos un* elemento negativo para cada vector. Demostraremos que, de ser así, tales elementos son únicos.

Teorema de unicidad del elemento nulo

Supongamos que el espacio *V* contuviese dos elementos nulos, $\mathbf{0}_1$ y $\mathbf{0}_2$. En el axioma $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, válido *para todo* $\mathbf{a}$, tomemos $\mathbf{a} = \mathbf{0}_1$ y como elemento nulo el elemento $\mathbf{0}_2$. Tenemos entonces que $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$. De modo similar sea $\mathbf{a} = \mathbf{0}_2$ y ahora $\mathbf{0}_1$ el elemento nulo, que nos da $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. Ahora, por el axioma de conmutatividad de la suma tenemos que $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1$, es decir, tomando en cuenta las relaciones anteriores, $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$, QED.

Teorema de unicidad del elemento negativo

Supongamos que el vector $\mathbf{a}$ tuviese dos negativos $\mathbf{n_a}$ y $\mathbf{m_a}$, es decir, que fuesen válidas ambas ecuaciones $\mathbf{a} + \mathbf{n_a} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{a} + \mathbf{m_a} = \mathbf{0}$, con $\mathbf{n_a} \neq \mathbf{m_a}$. Añadiendo $\mathbf{m_a}$ a ambos miembros de la primera ecuación,

(r1) $$\mathbf{m_a} + (\mathbf{a} + \mathbf{n_a}) = \mathbf{m_a} + \mathbf{0}$$

Usando el axioma $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ tenemos que el segundo miembro de (r1) es $\mathbf{m_a}$, así que

(r2) $$\mathbf{m_a} + (\mathbf{a} + \mathbf{n_a}) = \mathbf{m_a}$$

Por otra parte, transformemos el primer miembro de (r2) mediante los axiomas de asociatividad y conmutatividad de la suma y el axioma de existencia del elemento nulo,

(r3) $$\mathbf{m_a} + (\mathbf{a} + \mathbf{n_a}) = (\mathbf{m_a} + \mathbf{a}) + \mathbf{n_a} = \mathbf{0} + \mathbf{n_a} = \mathbf{n_a}$$

Comparando (r2) con (r3) se deduce que $\mathbf{m_a} = \mathbf{n_a}$, QED.

Teorema. $0\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Abreviemos $\mathbf{c} \equiv 0\,\mathbf{a}$. Deseamos demostrar que $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Sumando $\mathbf{c}$ consigo mismo y usando el axioma $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ tenemos que $\mathbf{c} + \mathbf{c} = 0\,\mathbf{a} + 0\,\mathbf{a} = (0 + 0)\,\mathbf{a} = 0\,\mathbf{a} = \mathbf{c}$. Ahora añadamos a ambos lados de la ecuación $\mathbf{c} + \mathbf{c} = \mathbf{c}$ el negativo de $\mathbf{c}$, o sea $\mathbf{n_c}$; obtenemos $\mathbf{c} + \mathbf{c} + \mathbf{n_c} = \mathbf{c} + \mathbf{n_c}$, o sea $\mathbf{c} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ de donde, por el axioma $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, obtenemos $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, QED.

Teorema. El negativo de $\mathbf{a}$ es $\mathbf{n_a} = (-1)\mathbf{a}$.

Demostración:

$$\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = 1\,\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = [1 + (-1)]\,\mathbf{a} = 0\,\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (-1)\mathbf{a} = \mathbf{n_a}$$

¿Qué axiomas y teoremas se emplearon en esta demostración? (Son tres axiomas y un teorema).

Definiciones

Advierta que los axiomas no contemplan el símbolo "$-\mathbf{a}$". Lo introduciremos ahora y daremos unas reglas para manejar el signo "–".

El teorema recién enunciado, junto con el teorema de unicidad del elemento negativo, nos permiten hacer la siguiente definición,

$$-\mathbf{a} \equiv (-1)\mathbf{a}$$

la cual es válida para todo vector **a**. Por ejemplo, poniendo en esta relación definitoria "$\lambda\mathbf{b}$" o bien "$\mathbf{c} + \mathbf{d}$" en lugar de **a** tendríamos estos significados:

$$-(\lambda\mathbf{b}) = (-1)(\lambda\mathbf{b}) \qquad \text{y} \qquad -(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = (-1)(\mathbf{c}+\mathbf{d})$$

Podemos desarrollar más, con ayuda de algunos axiomas:

$$(-1)(\lambda\mathbf{b}) = ((-1)\lambda)\mathbf{b} = (-\lambda)\mathbf{b}$$

$$(-1)(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = (-1)\mathbf{c} + (-1)\mathbf{d} = -\mathbf{c} + (-\mathbf{d})$$

De esta manera, los paréntesis salen sobrando en $-(\lambda\mathbf{b})$, porque es lo mismo que $(-\lambda)\mathbf{b}$. Ambas asociaciones pueden escribirse $-\lambda\mathbf{b}$.

Resta de dos vectores.

La *resta* o *diferencia* de dos vectores **a** y **b** se define a través de una suma:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Automáticamente tendremos que $-\mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{d} + (-\mathbf{c}) = \mathbf{d} - \mathbf{c}$, y también que $-(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = -\mathbf{c} - \mathbf{d}$, la cual es una regla para "quitar paréntesis".

División de vector por real.

La *división* de un vector **a** por un número real $\lambda \neq 0$ se define a través de una multiplicación:

$$\frac{\mathbf{a}}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{a}$$

Despeje

De la relación $\mathbf{a} + \mathbf{r} = \mathbf{b}$ podemos despejar **r** en la forma $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} + \mathbf{r} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{r} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) + \mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

Con las reglas expuestas hasta aquí hemos desarrollado un álgebra para manejar ecuaciones de la forma general

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} + \rho\mathbf{d} + \ldots + \sigma\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Sabemos "quitar paréntesis" y despejar vectores de este tipo de ecuaciones. Evidentemente, no es válido despejar un número real λ, μ, ν, …, porque su factor vectorial no puede pasarse "dividiendo" al otro miembro.

Problemas

1. Demostrar las siguientes propiedades:

(a) $-\lambda\mathbf{a} = \lambda(-\mathbf{a})$.

(b) Si $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$, entonces $\lambda = 0$ o $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(c) Si $\lambda\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ y $\lambda \neq 0$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

(d) Si $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces $\lambda = \mu$.

1.3 Vector separación

A continuación construiremos un espacio vectorial real muy simple, el espacio de los "vectores separación".

Siguiendo el programa descrito al principio de la sección 1.2, empezaremos por definir estos vectores. Para ello nos valdremos de un sistema de coordenadas cartesianas, con origen O y ejes X, Y, Z.

Se define el *vector separación* entre los puntos $A(x_A, y_A, z_A)$ y $B(x_B, y_B, z_B)$ como la terna de coordenadas cartesianas del punto B, calculadas *como si* el origen O del sistema cartesiano estuviese en A, manteniéndose invariables las direcciones de los ejes.

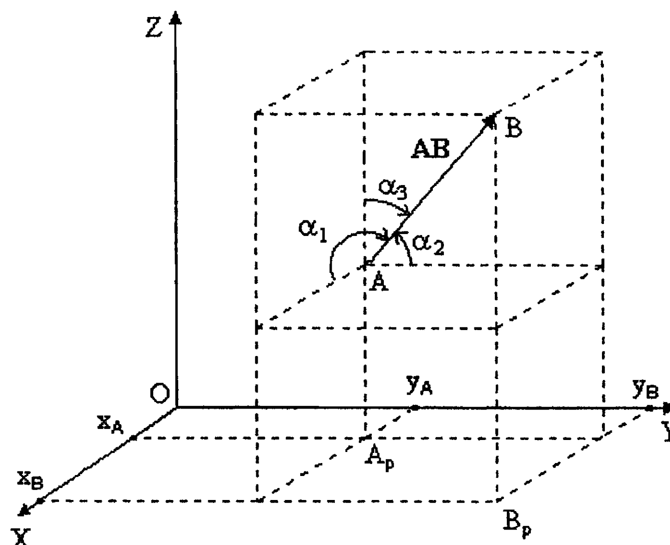


Fig. 1

En la Fig. 1, imaginemos que el sistema cartesiano se trasladara de modo que su origen O viniera a coincidir con el punto A. Entonces las coordenadas cartesianas de B en este sistema trasladado serían $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Esto es por definición el vector separación entre A y B, que escribiremos en la forma

(1) $$\mathbf{AB} \equiv (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Los números $x_B - x_A$, $y_B - y_A$, y $z_B - z_A$ se denominan respectivamente la *componente X*, *componente Y* y *componente Z* del vector **AB**. Este vector se representa geométricamente por la flecha cuyo punto inicial es A y cuya punta es B[1], a la cual llamaremos "flecha **AB**". Geométricamente, las componentes del vector **AB** son las proyecciones de la flecha **AB** sobre los ejes coordenados. Para obtener estas proyecciones podemos proyectar directamente los puntos A y B sobre los ejes, o bien proyectar primero

[1] O convencionalmente por cualquier flecha con la misma longitud y orientación que la flecha **AB**.

la flecha **AB** sobre cada uno de los *planos* XY, XZ y YZ y luego volver a proyectar estas proyecciones, ahora sobre los ejes. Por ejemplo, en la Fig. 1, al proyectar la flecha sobre el plano XY obtenemos el segmento A_pB_p, y al proyectar este segmento sobre los ejes X y Y obtenemos las cantidades $x_B - x_A$ y $y_B - y_A$. Estas proyecciones son "algebraicas", esto es, tienen signo algebraico positivo o negativo según el punto-proyección de B caiga delante o detrás del punto-proyección de A, con respecto al sentido positivo del eje considerado.

En un contexto cinemático el vector separación se nombra *vector desplazamiento*. El término "desplazamiento" es sinónimo de "cambio de posición" (ubicación espacial) y es una cantidad física vectorial cuyas componentes poseen unidades de "metros". Cuando una partícula se desplaza de un punto A a un punto B, sea cual sea la trayectoria que los enlaza o el tiempo invertido en ello, decimos que ha efectuado un desplazamiento dado por el vector **AB** definido en (1). Por ahora las componentes de **AB** son números reales puros, sin unidades físicas; sus valores son relativos a la escala de longitud definida sobre los ejes coordenados. Más adelante explicaremos cómo añadir las unidades.

Se define la *magnitud* del vector **AB** en la forma

$$\text{(2)} \qquad AB = |\mathbf{AB}| \equiv \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Como vemos, es igual a la distancia entre los puntos A y B, o longitud de la flecha **AB**.

Los *ángulos directores* del vector **AB** son los ángulos α_1, α_2 y α_3 que forma la flecha **AB** con los ejes coordenados X, Y y Z, respectivamente. Se tiene

$$\text{(3)} \qquad \cos\alpha_1 = \frac{x_B - x_A}{|\mathbf{AB}|} \qquad \cos\alpha_2 = \frac{y_B - y_A}{|\mathbf{AB}|} \qquad \cos\alpha_3 = \frac{z_B - z_A}{|\mathbf{AB}|}$$

Por (2) existe la relación

$$\text{(4)} \qquad \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$

en virtud de la cual basta con *dos* ángulos directores para especificar la dirección de la flecha **AB**, misma cosa que la *dirección* del vector separación **AB**.[2]

Advierta la distinción entre el *vector* **AB**, un *objeto algebraico* definido por una terna ordenada de componentes, y la *flecha* **AB**, un *objeto geométrico* que *representa* visualmente al vector. No habrá inconsistencia en fundir ambos conceptos en uno sólo, y llamar "vector **AB**" tanto a la terna como a su flecha representante. Esto es análogo a "ver" un plano en una ecuación del tipo Ax + By + C = 0.

[2] En nuestro uso, el término *dirección* englobará ambas cosas que en los cursos elementales se denominan *dirección* y *sentido*. Así por ejemplo, el eje X de un sistema cartesiano define *dos direcciones*: la dirección hacia donde crece la coordenada "x" es la *dirección positiva del eje* X (o dirección +X); la opuesta a ésta es la *dirección negativa del eje* X (o dirección –X). Análogamente en relación con los ejes Y y Z. De todas maneras seguiremos usando el término "sentido" cuando sea particularmente aclarativo.

Prosiguiendo con la construcción del espacio de los vectores separación, nuestras tareas siguientes consisten en definir la igualdad, la suma vectorial y el producto de vector por número real.

Para simplificar la notación escribiremos el vector separación general en la forma

(5) $\mathbf{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$

El signo de identidad "≡" en (5) expresa que el símbolo "**a**" es un *nombre, abreviatura o referencia* para la terna (a_x, a_y, a_z). No obstante, conviene usar para esta función el signo de igualdad, como en $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Ello para ser consistentes con el uso de este signo en relaciones simbólicas como $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, etc.

Sean $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ y $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ vectores separación cualesquiera, y λ y μ números reales cualesquiera.

Igualdad

Por definición, el vector **a** es *igual* al vector **b** si y sólo si

$$a_x = b_x \qquad a_y = b_y \qquad \text{y} \qquad a_z = b_z$$

La igualdad se expresa sucintamente en la forma $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Suma

Por definición, la suma de dos vectores **a** y **b** es otro vector $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ tal que

$$c_x = a_x + b_x \qquad c_y = a_y + b_y \qquad c_z = a_z + b_z$$

Se expresa esta relación en la forma $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.

Multiplicación por un real

Por definición, el producto del número real λ y el vector **a** es el vector

$$(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

Se indica este producto en la forma $\lambda\mathbf{a}$ o bien $\lambda \cdot \mathbf{a}$.

Finalmente, tendremos un espacio vectorial real si el conjunto de las ternas (5) satisface los axiomas del espacio vectorial real. Se deja al estudiante demostrar que efectivamente así es. El elemento nulo de este espacio es el vector $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, y el elemento negativo del vector **a** es $(-a_x, -a_y, -a_z) = (-1)(a_x, a_y, a_z) = -(a_x, a_y, a_z)$.

1.4 INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LAS OPERACIONES VECTORIALES.

Describiremos en esta sección unos métodos geométricos para efectuar las operaciones de suma vectorial y producto de vector por número real. Lo haremos en un contexto bidimensional; el lector puede extender los métodos a vectores en tres dimensiones.

En dos dimensiones el vector separación entre los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ es

(6) $$\mathbf{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Esta expresión es válida no importa qué signos algebraicos tengan las coordenadas de A y B (Fig. 2).

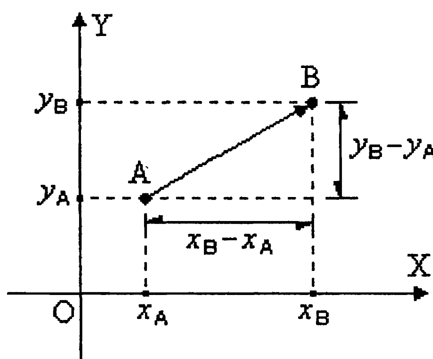


Fig. 2

La magnitud de **AB** se reduce a

(7) $$|\mathbf{AB}| \equiv AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

La *dirección* del vector **AB** es por definición el ángulo θ que forma la flecha **AB** con el eje X (Fig. 3). Este ángulo se expresa en radianes y se mide en sentido antihorario (o "levógiro") desde la dirección positiva del eje X. Toma valores en el intervalo $[0, \infty)$.

Note que de acuerdo con lo que entendemos por "dirección", las flechas ilustradas en la Fig. 4 tienen *direcciones opuestas*; corresponden a ángulos que se diferencian en 180°. Claro está, también es válido decir que tienen *sentidos* opuestos.

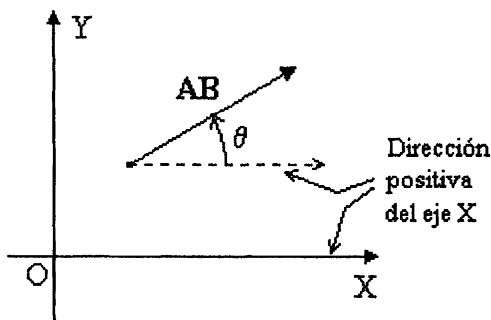


Fig. 3



Fig. 4

En la "notación de magnitud y dirección" o "notación de fasores", alternativa a la notación (6), el vector **AB** se escribe

(8) $$\mathbf{AB} = (AB \angle \theta)$$

Si las direcciones θ se usan como argumentos de funciones trigonométricas que tienen una periodicidad de 2π radianes, se puede limitar la dirección θ al intervalo [0, 2π], o bien a [0, 360°] si se mide en grados.

Más aun, se puede medir el ángulo también en sentido horario (o "dextrógiro"), caso en que deberá tomarse con signo negativo.

Como vemos en la Fig. 5, la dirección $\theta = -70°$ será la misma que $\theta = 290°$. Como dijimos, esto proviene de propiedades como la expresada en la igualdad

$$\text{sen}\,290° = \text{sen}(290° - 360°) = \text{sen}(-70°)$$

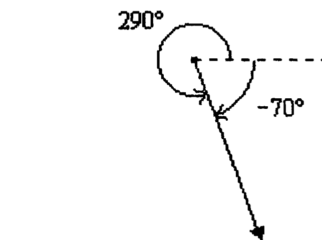


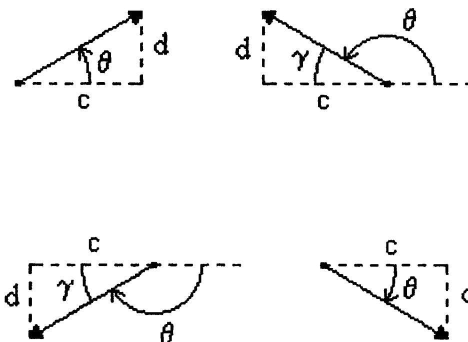
Fig. 5

Para obtener la dirección de una flecha a partir de sus componentes, conviene dibujar la flecha en el papel, como se hace en la figura 6, luego calcular el ángulo agudo γ que se muestra allí, y finalmente obtener θ ajustando γ apropiadamente.

Al usar la calculadora electrónica tenga presente que la función arctan(x) devuelve un ángulo en el intervalo [– 90°, 90°]. Mejor use la fórmula θ = atan2(c, d), donde la función atan2(c, d) se define así:

(9)

$$\text{atan2}(c,d) = \begin{cases} \gamma & \text{si } c,d > 0 \\ 180° - \gamma & \text{si } c < 0, d > 0 \\ -180° + \gamma & \text{si } c,d < 0 \\ -\gamma & \text{si } c > 0, d < 0 \end{cases}$$



Aquí γ es el ángulo agudo positivo dado por

$$\gamma = \arctan\left|\frac{d}{c}\right|$$

Fig. 6

Ejemplo 1. Calcular la dirección de la flecha que va de P(2, 3) a Q(– 5, 1).

Usando la ecuación (6) obtenemos **PQ** = (– 5 – 2, 1 – 3) o sea **PQ** = (– 7, – 2), lo que podríamos haber obtenido gráficamente de la Fig. 7. Ahora calculamos γ en la forma

$$\gamma = \arctan\left(\frac{2}{7}\right) \approx 16°$$

En (9) tenemos el caso $c < 0$ y $d < 0$, o sea

$$\theta = \text{atan2}(-2, -7) = -180° + \gamma = -164°$$

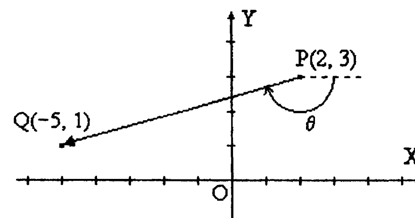


Fig. 7

Suma vectorial

En términos de flechas, la suma vectorial se puede efectuar con dos métodos equivalentes. Los ilustraremos para la suma de los vectores **a** = (3, 6) y **b** = (10, 2).

En el *método del triángulo* (Fig. 8) se traza primero la flecha **a**; después se traza la flecha **b** de modo que su punto inicial coincida con el final de **a**; la suma **a** + **b** es la flecha **c** que va desde el punto inicial de **a** hasta la punta de **b**, esto es, **c** = **a** + **b** = (13, 8).

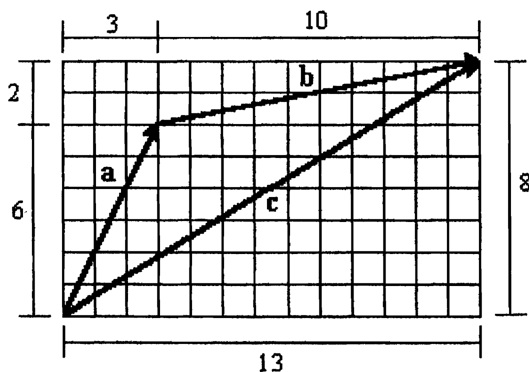


Fig. 8

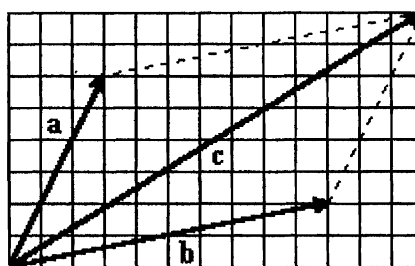


Fig. 9

En el *método del paralelogramo*, ambos sumandos **a** y **b** se trazan desde un mismo punto inicial (Fig. 9); después se completa el paralelogramo determinado por ambas flechas. La suma **a** + **b** es la flecha diagonal que va desde el punto inicial común hasta su vértice opuesto del paralelogramo.

Al vector **0** = (0, 0) le correspondería una flecha cuya longitud es nula y por lo tanto cuya orientación es inasignable. Ni siquiera cabría llamarle "flecha" a esta construcción. Sin embargo, las operaciones de suma de flechas y producto de flechas por números reales se pueden llevar a cabo geométrica y consistentemente imaginando la "flecha **0**" como una cuyos puntos inicial y final coinciden, asignándole magnitud cero y cualquier orientación del plano.

El método del triángulo es el más conveniente para obtener gráficamente la suma de más de dos vectores. Para obtener la suma **a** + **b** + **c** + **d**, colocamos los sumandos en cadena (Fig. 10); la suma es el vector que va del punto inicial del primer vector, **a**, a la punta del último vector, **d**.

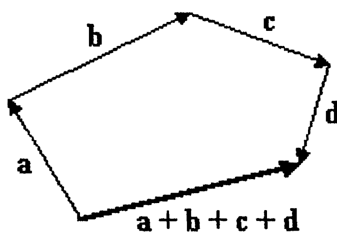


Fig. 10

Si la suma de varios vectores arroja el resultado **0**, entonces los vectores-sumandos forman un polígono. En la Fig. 11 se ilustra la operación **a** + **b** + **c** + **d** + **e** = **0**.

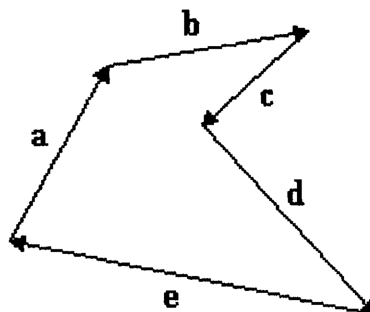


Fig. 11

Resta de vectores

Para obtener gráficamente la resta de dos vectores **a** y **b**, se colocan partiendo del mismo punto. El vector diferencia **b** – **a** es el que va desde la punta del vector **a** (sustraendo) hasta la punta del vector **b** (minuendo), tal como vemos en la Fig. 12.

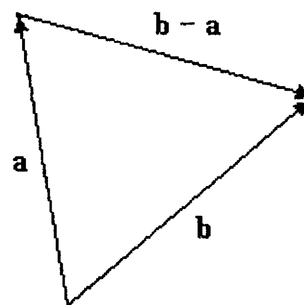


Fig. 12

Producto de vector por real

Pasemos a la interpretación geométrica del producto λ **a**.

Si λ es positivo, el vector λ **a** tiene la misma dirección que **a**, pero una longitud igual a λ veces la de **a**. Si λ es negativo la longitud de λ**a** es | λ | veces la de **a**, y la dirección es opuesta a la de **a**.

En la Fig. 13 se muestra el vector **a** = (3, 2) junto con los productos

2 **a** = (6, 4) –3 **a** = (–9, –6)

– **a** = (–3, –2) 0.5 **a** = (1.5, 1)

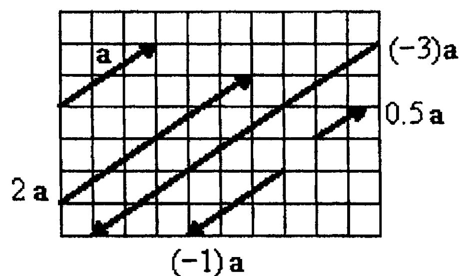


Fig. 13

1.5 VECTOR DE POSICIÓN

El vector separación **AB** se representa, como dijimos, por la flecha que parte de A y termina en B. De hecho, convencionalmente lo representamos por *cualquier* flecha con la misma longitud y dirección que la flecha **AB**, por lo que decimos que el vector **AB** es un *vector* "*libre*" o "*no localizado*", es decir, entre sus propiedades determinantes no se incluye su punto inicial.

Un caso especial de vector separación es el que une el origen O con algún otro punto P del espacio (Fig. 14).

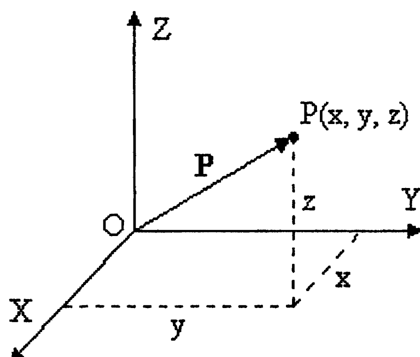


Fig. 14

Este sí es un *vector localizado*, por lo cual se entiende en este caso que su punto inicial está "anclado": siempre debe ser el origen de coordenadas.

El vector separación general **OP** se denomina *vector de posición* de P, y se suele designar con "$\mathbf{r}_P$" o simplemente con "**P**". Sus componentes son las coordenadas cartesianas de P:

$$\mathbf{OP} \equiv \mathbf{r}_P \equiv \mathbf{P} = (x, y, z)$$

El vector separación **AB** se puede escribir como una diferencia de vectores de posición,

$$\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} \qquad (\text{O bien } \mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$$

Al vector **AB** se le nombra también *vector de posición de* B *relativo a* A[3].

Para 4 puntos A, B, C, D arbitrarios tenemos

$$\mathbf{AD} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CD} = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) + (\mathbf{C} - \mathbf{B}) + (\mathbf{D} - \mathbf{C}) = \mathbf{D} - \mathbf{A}$$

---

[3] Más propiamente, relativo a un sistema coordenado trasladado hasta el punto A.

1.6 INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES. BASES VECTORIALES

Unos asuntos de nomenclatura, concerniente a vectores de *cualquier* naturaleza (suponemos que ninguno de los vectores **a**, **b**, **c**, …, **s** mencionados abajo es el vector **0**):

- La expresión

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} + \ldots + \sigma\mathbf{s}$$

donde λ, μ, ν, …, σ son números reales, se denomina *combinación lineal* de los vectores **a**, **b**, **c**, …, **s**.

- Los vectores **a**, **b**, **c**, …, **s** son *linealmente independientes* si la única manera como la ecuación

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} + \ldots + \sigma\mathbf{s} = \mathbf{0}$$

puede ser cierta es que $\lambda = \mu = \nu = \ldots = \sigma = 0$.

Independencia lineal de dos, tres o más vectores

Que dos vectores, **a** y **b**, sean linealmente independientes significa que no es posible encontrar números λ, μ, a no ser $\lambda = 0$ y $\mu = 0$, tales que $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Es fácil ver geométricamente cuándo es este el caso. Si se verificara que $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$, entonces sería $\lambda\mathbf{a} = -\mu\mathbf{b}$ y los vectores **a** y **b** tendrían direcciones iguales u opuestas. Para dos vectores con direcciones distintas como los vectores **a** y **b** de la Fig. 15, la única manera como puede cumplirse la relación

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

es que tanto λ como μ sean iguales a 0. Supongamos que **a** y **b** sean linealmente independientes. Tracemos sus flechas de modo que partan del mismo punto (Fig. 16). Geométricamente es evidente que cualquier vector del plano determinado por **a** y **b** se puede expresar como una combinación lineal de estos vectores, es decir, en la forma

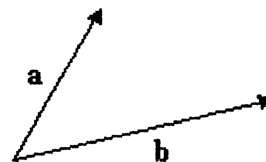


Fig. 15

(10) $$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$

$\Rightarrow$ **c** está en el plano de **a** y **b**
$(\lambda, \mu \neq 0)$

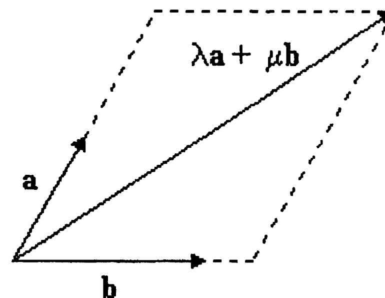


Fig. 16

Se sigue que tres vectores *coplanarios* **a**, **b** y **c** son linealmente *dependientes*, puesto que cumplen una relación del tipo

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

con $\lambda, \mu, \nu \neq 0$.

(Según (10) se tiene $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$).
Para que *tres* vectores sean linealmente independientes no deben ser coplanarios, como los vectores **a**, **b**, **c** que vemos en la Fig. 17.

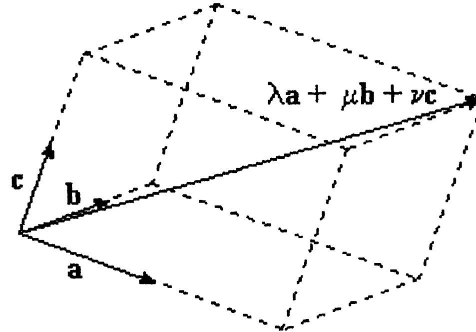


Fig. 17

En el espacio tridimensional, más de tres vectores (todos con direcciones distintas) siempre son *linealmente dependientes*.

- Una *base vectorial* es un conjunto de vectores {**a**, **b**, **c**, ..., **s**} linealmente independientes, tal que *cualquier* otro vector **v** del espacio puede expresarse como una combinación lineal de los *vectores básicos* **a**, **b**, ..., **s**, o sea

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} + \ldots + \sigma\mathbf{s}$$

Decimos en este caso que los números [λ, μ, ν, ..., σ] *representan* al vector **v** en dicha base.

En el espacio tridimensional, tres vectores {**a**, **b**, **c**} con direcciones distintas forman una base vectorial. Un caso importante de base vectorial es la *base cartesiana* {**i**, **j**, **k**}, formada por los vectores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Estos vectores son *unitarios* (de magnitud igual a la unidad) y mutuamente perpendiculares, por lo que decimos que la base es *ortonormal*.
La expresión $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ es de hecho la representación del vector **a** en una base cartesiana, puesto que:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_x, 0, 0) + (0, a_y, 0) + (0, 0, a_z) =$$

$$= a_x\,(1, 0, 0) + a_y\,(0, 1, 0) + a_z\,(0, 0, 1) = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$

Ejemplo 2. Expresar el vector **a** = (– 4, – 7, 1) como una combinación lineal de los vectores **b** = (1, 4, –3), **c** = (0, – 5, 2) y **d** = (6, 0, – 1) (o equivalentemente: expresarlo en la base vectorial {**b**, **c**, **d**}).

Planteemos la relación $\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{b} + \mu\,\mathbf{c} + \nu\,\mathbf{d}$ y desarrollémosla en componentes:

$$(-4, -7, 1) = \lambda\,(1, 4, -3) + \mu\,(0, -5, 2) + \nu\,(6, 0, -1).$$
$$= (\lambda + 6\,\nu,\ 4\,\lambda - 5\,\mu,\ -3\,\lambda + 2\,\mu - \nu)$$

Se desprenden tres ecuaciones para λ, μ y ν, a saber,

$$-4 = \lambda + 6\,\nu \qquad -7 = 4\,\lambda - 5\,\mu \qquad 1 = -3\,\lambda + 2\,\mu - \nu$$

cuya solución simultánea es $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\nu = -1$. Entonces,

$$\mathbf{a} = 2\,\mathbf{b} + 3\,\mathbf{c} - \mathbf{d}$$

Ejemplo 3. Sea un vector variable **R**(t, s) dado por

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + s\,\mathbf{c}$$

donde **a**, **b** y **c** son vectores dados (linealmente independientes) y t y s son parámetros (números reales). Dados los vectores $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ correspondientes a tres parejas de valores cualesquiera de los parámetros, $\{t_1, s_1\}$, $\{t_2, s_2\}$ y $\{t_3, s_3\}$, ¿qué condición debe cumplirse para que sean linealmente dependientes?

Los vectores serán linealmente *dependientes* si existen números λ, μ, ν, al menos uno distinto de cero, tales que

$$\lambda\,\mathbf{R}_1 + \mu\,\mathbf{R}_2 + \nu\,\mathbf{R}_3 = \mathbf{0}$$

Esta ecuación es equivalente a

$$\lambda(\mathbf{a} + t_1\mathbf{b} + s_1\mathbf{c}) + \mu(\mathbf{a} + t_2\mathbf{b} + s_2\mathbf{c}) + \nu(\mathbf{a} + t_3\mathbf{b} + s_3\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \qquad (\lambda + \mu + \nu)\mathbf{a} + (\lambda t_1 + \mu t_2 + \nu t_3)\mathbf{b} + (\lambda s_1 + \mu s_2 + \nu s_3)\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

En virtud de que **a**, **b** y **c** son linealmente independientes por hipótesis, se sigue de la última relación que cada coeficiente debe ser igual a cero. Se obtiene así un sistema homogéneo de tres ecuaciones para λ, μ y ν. Si este sistema posee una solución no trivial, entonces $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ son linealmente dependientes, y son linealmente independientes en caso negativo. La condición para que exista solución no trivial es que el determinante del sistema sea igual a cero.

1.7. Producto escalar y producto vectorial

Producto escalar

Consideremos el siguiente problema:

Calcular el ángulo θ que forman los vectores **A** = (A_x, A_y, A_z) y **B** = (B_x, B_y, B_z) (Véase la Fig. 18).

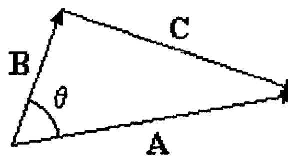


Fig. 18

Definamos el vector **C** ≡ **A** – **B** y apliquemos la ley de los cosenos al triángulo cuyos lados son **A**, **B** y **C**:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B\cos\theta$$

Ahora bien,

$$A^2 + B^2 - C^2 = A_x^{\;2} + A_y^{\;2} + A_z^{\;2} + B_x^{\;2} + B_y^{\;2} + B_z^{\;2}$$
$$- (A_x - B_x)^2 - (A_y - B_y)^2 - (A_z - B_z)^2 = 2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$$

Se obtiene una relación de la que ya podemos obtener el ángulo θ, a saber,

$$AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

La combinación $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ se denomina el *producto escalar* de los vectores **A** y **B**. Se escribe

(11) $$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = AB\cos\theta$$

Se deducen de (11) las siguientes propiedades del producto escalar:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A} \qquad (\lambda\mathbf{A}) \bullet (\mu\mathbf{B}) = \lambda\mu\,(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) \qquad \mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} + \mathbf{A} \bullet \mathbf{C}$$

He aquí unos usos del producto escalar:

- La magnitud de un vector **A** se puede poner

(12) $$|\,\mathbf{A}\,|^2 = A^2 = A_x^{\;2} + A_y^{\;2} + A_z^{\;2} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{A}$$

o sea $$A = \sqrt{\mathbf{A} \bullet \mathbf{A}}$$

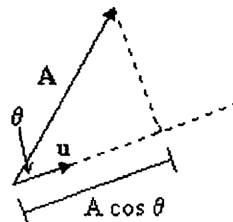
En particular, para un vector diferencia **B** – **C** tenemos

$$|\,\mathbf{B} - \mathbf{C}\,| = [(\mathbf{B} - \mathbf{C}) \bullet (\mathbf{B} - \mathbf{C})]^{1/2} = [B^2 + C^2 - 2\,\mathbf{B} \bullet \mathbf{C}]^{1/2}$$

- Podemos expresar que los vectores **A** y **B** (distintos de **0**) son mutuamente perpendiculares mediante la relación

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 0$$

- Para obtener la componente de un vector **A** a lo largo de (la dirección de) un vector unitario **u** (Fig. 19 arriba), formamos el producto escalar



$$A_u = \mathbf{A} \bullet \mathbf{u} = A \cos\theta =$$

= componente de **A** a lo largo de **u**.

- Por otra parte, la descomposición de un vector en dos componentes vectoriales, una paralela y la otra perpendicular al unitario **u**, tiene la forma $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{u})\,\mathbf{u} + (\mathbf{A} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{u})\,\mathbf{u})$, como vemos en la Fig. 19 abajo.

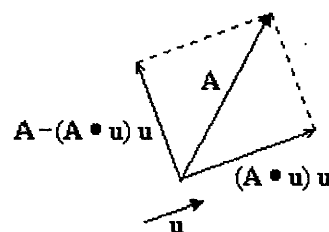


Fig. 19

Ejemplo 4. El cubo mostrado en la Fig. 20 tiene lado "a". ¿Qué ángulo forma la diagonal AE con cada uno de los vectores **AD**, **AG** y **AB**?

El vector **AE** obviamente forma un ángulo de 90° con el vector **AD** y un ángulo de 45° con **AB**.

Para calcular el ángulo entre AE y AG, definamos el eje X a lo largo de **AB**, el eje Y a lo largo de **AC**, y el eje Z a lo largo de **AD**.

Tendremos entonces que

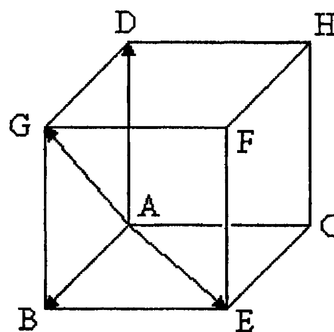


Fig. 20

$$\mathbf{AE} = (a, a, 0)$$

y $$\mathbf{AG} = (a, 0, a)$$

Entonces,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{AE} \bullet \mathbf{AG}}{|\,\mathbf{AE}\,| \cdot |\,\mathbf{AG}\,|} = \frac{(a,a,0) \bullet (a,0,a)}{\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 60^\circ$$

Ejemplo 5. Dos vigas articuladas entre sí en C y a una pared en A y B (Fig. 21) soportan el peso de una caja. Las longitudes de las vigas, antes de aplicar la carga, son AC = 0.8 m y BC = 1m. Se sabe que por efecto de la carga, la viga BC se elonga $\delta_2 = 0.002$ m y la viga AC se acorta $\delta_1 = 0.001$ m. Calcular la posición del punto C en la configuración deformada del sistema. Utilizar la aproximación "cateto = hipotenusa" para resolver el problema.

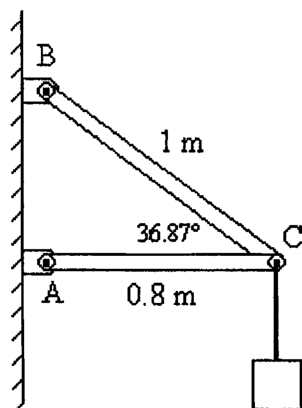


Fig. 21

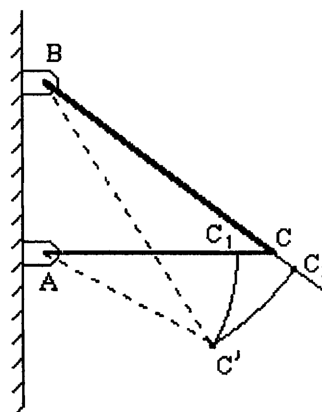


Fig. 22

La solución geométrica exacta del problema la obtenemos así (Fig. 22):

Acortemos la viga AC en un pequeño segmento $CC_1 = \delta_1$. Elonguemos la viga BC en un pequeño segmento $CC_2 = \delta_2$. Con centros en A y B tracemos sendos arcos de circunferencia de radios AC_1 y BC_2. El punto donde estos arcos se intersecan es adonde va a dar el punto C después de la deformación, puesto que $AC' = AC - \delta_1$ y $BC' = BC + \delta_2$. Las líneas punteadas en la Fig. 22 representan la posiciones finales de las vigas (las deformaciones se han exagerado para mejor visualización).

Ahora bien, la elongación δ_2 y la contracción δ_1 son mucho muy pequeñas en comparación con las longitudes de las vigas. Podemos hacer una aproximación que consiste en trazar, en lugar de arcos de circunferencia C_1C' y C_2C', unos segmentos perpendiculares a las direcciones originales de las vigas (En la Fig. 22 figúrese los arcos C_1C' y C_2C' como si fuesen segmentos rectos trazados desde C_1 y C_2 perpendicularmente a las vigas).

Esta se denomina la aproximación "cateto-hipotenusa" porque en un triángulo rectángulo, como el que vemos en la Fig. 23, viene siendo equivalente a igualar el cateto OP a la hipotenusa OQ. La aproximación es muy buena si el ángulo $\alpha = \angle POQ$ es muy pequeño. También equivale a $\text{sen}\,\alpha \approx \tan\alpha$. Como si PQ fuese un "arco" de circunferencia en vez de un segmento o cateto recto.

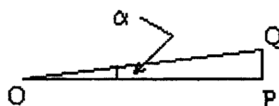


Fig. 23

Resolveremos el problema conforme a esta aproximación. Primeramente lo generalizaremos como se muestra en la Fig. 24, en la que suponemos que las vigas forman inicialmente ángulos θ_1 y θ_2 con la dirección horizontal (+X), y que ambas sufren *elongaciones*, dadas por los segmentos $\delta_1 = CC_1$ y $\delta_2 = CC_2$.

Se trata de calcular el desplazamiento del punto C, es decir, el vector **CC′**. Para obtener C′ geométricamente, trazamos por C_1 el "arco" C_1C' de radio AC_1, y centro A, y luego trazamos por C_2 el "arco" C_2C' de radio BC_2 y centro B. El punto de intersección de estos arcos (segmentos rectos perpendiculares a AC y BC) es C′.

Definamos los vectores unitarios $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, en las direcciones AC y BC, respectivamente, o sea

$$\mathbf{u}_1 = (\cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1)$$

$$\mathbf{u}_2 = (\cos\theta_2, \operatorname{sen}\theta_2)$$

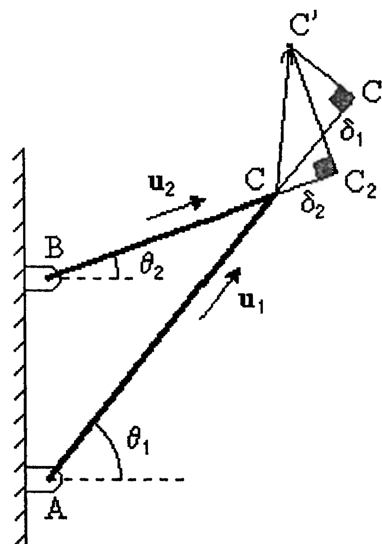


Fig. 24

Tenemos los datos $\mathbf{CC'} \bullet \mathbf{u}_1 = CC_1 = \delta_1$ y $\mathbf{CC'} \bullet \mathbf{u}_2 = CC_2 = \delta_2$

Abreviando $\mathbf{CC'} \equiv \mathbf{d} = (d_x, d_y)$ y desarrollando los productos escalares tenemos

$$d_x \cos\theta_1 + d_y \operatorname{sen}\theta_1 = \delta_1 \qquad d_x \cos\theta_2 + d_y \operatorname{sen}\theta_2 = \delta_2$$

Este es un sistema de ecuaciones para d_x y d_y, cuya solución es

$$d_x = \frac{\delta_1 \operatorname{sen}\theta_2 - \delta_2 \operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)} \qquad d_y = \frac{-\delta_1 \cos\theta_2 + \delta_2 \cos\theta_1}{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}$$

En nuestro problema tenemos $\delta_1 = -0.001$ m, $\theta_1 = 0$, $\delta_2 = 0.002$ m y $\theta_2 = -36.87°$. Sustituyendo en las fórmulas anteriores hallamos

$$d_x = -0.001 \text{ m} \qquad d_y = -0.00466 \text{ m}$$

Note que δ_1 es negativa porque es una contracción, y que θ_2 es negativo porque se midió a partir de la dirección horizontal en sentido *horario*.

Ejemplo 6. ABCD es un tetraedro regular de lado “a”. Demostrar que las líneas que parten de los vértices A, B y C hasta el punto medio M de la altura tirada desde el cuarto vértice D son todas perpendiculares entre sí.

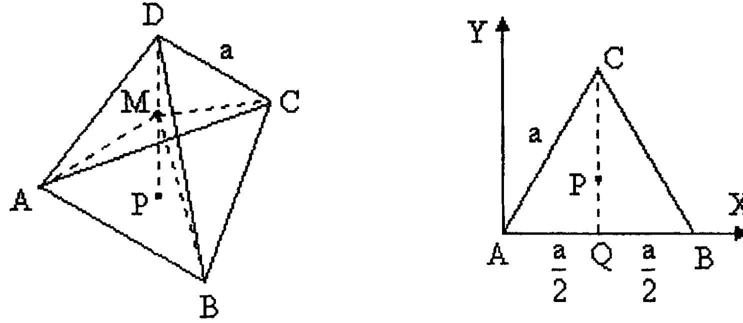


Fig. 25

En la Fig. 25 a la izquierda está el tetraedro considerado. DP es la altura tirada desde D y M es el punto medio de DP.

Coloquemos un sistema cartesiano con su eje X a lo largo de AB, y su plano XY en el plano del triángulo ABC, tal como vemos en la Fig. 25 a la derecha. Calculemos ahora los vectores de posición de todos los vértices. Estos son triviales: **A** = (0, 0, 0), **B** = (a, 0, 0).

El punto P, que es la proyección de D sobre el plano XY, divide la mediana CPQ que vemos en la Fig. 25 derecha en una relación de 2 a 1. Por otra parte, AP = BP = CP. Con esto obtenemos ya

$$\mathbf{C} = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right) \qquad \mathbf{D} = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a, \sqrt{\frac{2}{3}}a\right) \qquad \mathbf{M} = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a, \frac{1}{\sqrt{6}}a\right)$$

Obtengamos ahora los vectores en cuestión:

$$\mathbf{MA} = \mathbf{A} - \mathbf{M} = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}a, -\frac{1}{\sqrt{6}}a\right)$$

$$\mathbf{MB} = \mathbf{B} - \mathbf{M} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}a, -\frac{1}{\sqrt{6}}a\right)$$

$$\mathbf{MC} = \mathbf{C} - \mathbf{M} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}a, -\frac{1}{\sqrt{6}}a\right)$$

Se comprueba ahora que **MA • MB** = **MA • MC** = **MB • MC** = 0, QED.

Producto vectorial

Consideremos ahora el siguiente problema: dados dos vectores $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, obtener un vector perpendicular a ambos.

Denotando con **C** el vector buscado, tenemos las condiciones

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{A} = 0 \qquad\qquad \mathbf{C} \bullet \mathbf{B} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z = 0 \qquad\qquad B_x C_x + B_y C_y + B_z C_z = 0$$

Expresemos C_x y C_y en términos de C_z:

$$C_x = \frac{A_y B_z - A_z B_y}{A_x B_y - A_y B_x} C_z \qquad\qquad C_y = \frac{A_z B_x - A_x B_z}{A_x B_y - A_y B_x} C_z$$

Así, para obtener el vector **C** escogemos un valor arbitrario para C_z y calculamos C_x y C_y de estas fórmulas.

Se define el *producto vectorial* de los vectores **A** y **B**, escrito $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, como el vector[4]

$$\text{(13)} \qquad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y,\ A_z B_y - A_y B_z,\ A_x B_y - A_y B_x)$$

(que corresponde a tomar $C_z = A_x B_y - A_y B_z$ en las fórmulas anteriores).

Podemos escribirlo también en la forma

$$\text{(14)} \qquad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

De la definición se siguen estas propiedades del producto vectorial:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \qquad\qquad \text{(¡No es conmutativo!)}$$

$$(\lambda \mathbf{A}) \times (\mu \mathbf{B}) = (\lambda\mu)\, \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

En (13) el producto $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se ha definido a través de sus componentes. Se puede definir también en términos de magnitud y dirección. Para hacerlo así, coloquemos el vector **A** a lo largo del eje X y el vector **B** en el plano XY (Véase la Fig. 26).

---

[4] No cualquier terna es un vector; en todo caso hay que demostrarlo. Más adelante demostraremos que la terna (13) es efectivamente un vector.

Entonces,

$\mathbf{A} = (A, 0, 0)$

$\mathbf{B} = (B \cos\theta, B \operatorname{sen}\theta, 0)$

Sustituyendo en (13) obtenemos

$$(15) \qquad \mathbf{A}\times\mathbf{B} = (0, 0, A\,B \operatorname{sen}\theta) = $$

$$= (A\,B \operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{k}$$

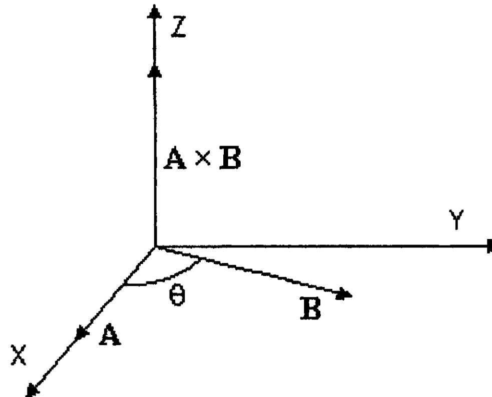


Fig. 26

Es decir, la magnitud de **A** × **B** es igual al área del paralelogramo determinado por los vectores **A** y **B**.[5] La dirección de **A** × **B** se obtiene con la regla de la mano derecha: en el plano de **A** y **B** se rota el primer factor, **A**, en el menor ángulo (θ) que lo hace coincidir con el segundo factor, **B**; entonces **A** × **B** está en la dirección en que se movería un tornillo de rosca derecha cuya sección transversal fuera el plano de **A** y **B**.

En la Fig. 27 tenemos un triángulo de vértices P, Q y R. Poniendo **PQ** ≡ **a** y **PR** ≡ **b** definimos el "*vector área*" del triángulo en la forma

$$(16) \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

La magnitud de **A** es el área del triángulo, y la dirección de **A** es perpendicular al plano definido por el triángulo, de acuerdo con la regla de la mano derecha. Proyectemos el triángulo PQR sobre el plano XY, obteniendo el triángulo P′Q′R′ mostrado en la figura. El área de P′Q′R′ es igual a la componente Z del vector **A**, como es fácil demostrar a partir de las expresiones

$$\mathbf{P'Q'} = (a_x, a_y, 0) \qquad \mathbf{P'R'} = (b_x, b_y, 0)$$

Análogamente, la proyección del triángulo PQR sobre el plano XZ es un triángulo cuya área es A_y, y la proyección sobre el plano YZ es un triángulo de área A_x. Del hecho que **A** es un vector se deduce que la proyección del triángulo PQR sobre un plano arbitrario es un triángulo cuya área es la componente de **A** perpendicular a dicho plano.

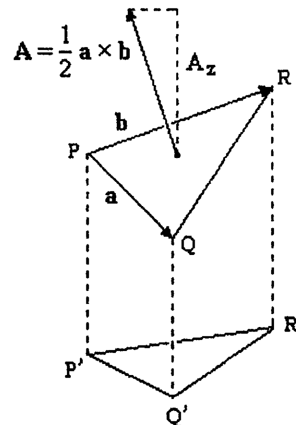


Fig. 27

[5] Esta interpretación no depende de la manera especial como hemos colocado los vectores **A** y **B** en relación con el sistema de coordenadas, puesto que A, B y θ son invariantes geométricos.

Áreas de triángulos y polígonos en el plano

Consideremos un triángulo situado en el plano XY (Fig. 28), de vértices conocidos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$.

El área del triángulo viene dada por

$$\Delta = \frac{1}{2} | \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} |$$

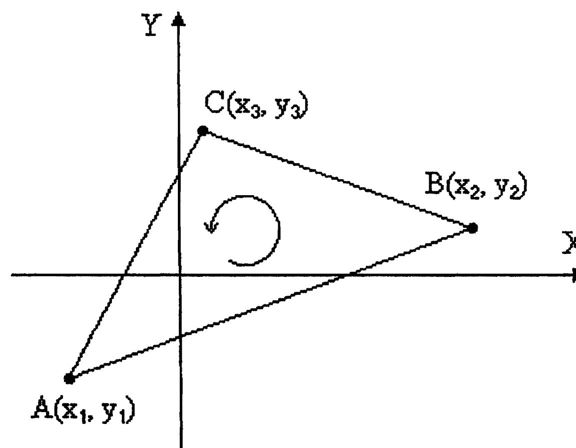


Fig. 28

La podemos expresar también así:

$$(17) \qquad \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

donde el peculiar "determinante" se define como una suma de determinantes de segundo orden:

$$(18) \qquad \Delta = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right)$$

Ojo: Δ resulta positiva si los vértices del triángulo se colocan en (17) conforme al sentido de rotación antihorario $A \to B \to C$. El orden horario corresponde a Δ negativa.

Un polígono de N lados situado en el plano XY viene determinado por los vértices $V_1(x_1, y_1)$, $V_2(x_2, y_2)$, …, $V_N(x_N, y_N)$. Su área viene dada por la expresión

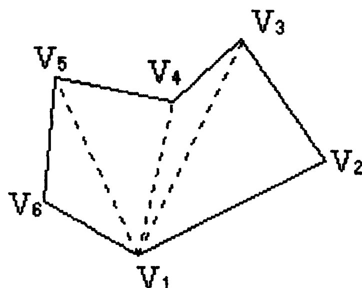


Fig. 29

$$(19) \qquad \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_N & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & & y_N & y_1 \end{vmatrix}$$

De nuevo, el determinante de 2 renglones y N + 1 columnas se define como la suma de determinantes de segundo orden

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_N & x_1 \\ y_N & y_1 \end{vmatrix}$$

La demostración se deja como ejercicio. Note que los vértices deben darse en orden antihorario.

1.8 TRIPLES PRODUCTOS

Triple producto escalar

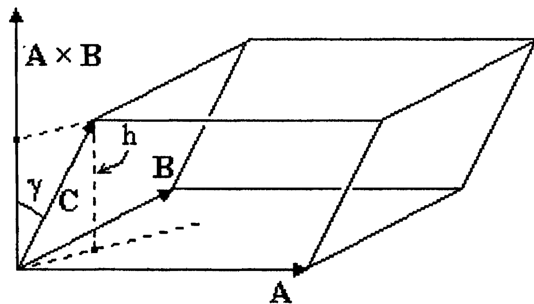


Fig. 30

El volumen "V" del paralelepípedo definido por los vectores **A**, **B** y **C** es igual al área de la base (dada por |**A** × **B**|) multiplicada por la altura "h", la cual es igual a C cos γ (Fig. 30).

Entonces

(20) $V = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|\, C \cos\gamma =$

$= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C}$

Análogamente, colocando la base del paralelepípedo en el plano de **C** y **A** o bien **B** y **C**, encontraríamos las relaciones

(21) $V = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \bullet \mathbf{B} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \bullet \mathbf{A}$

Como se ve, se puede hacer una sustitución cíclica **A** → **B**, **B** → **C** y **C** → **A** sin que el producto (21) se altere. También se pueden intercambiar el punto • y la cruz × y suprimir los paréntesis,

(22) $V = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \bullet \mathbf{C}$

Se sobreentiende, por supuesto, que primero debe hacerse el producto vectorial y luego el producto escalar, que es la única manera como la relación (22) tiene sentido.

Un producto de tres vectores como

$$\underline{A} \bullet \underline{B} \times \underline{C}$$

se denomina el *triple producto escalar* de los mismos. Este tipo de producto es igual a cero cuando dos de los factores tienen la misma dirección o direcciones opuestas,

$$\mathbf{A} \bullet (\lambda\, \mathbf{A} \times \mathbf{C}) = 0$$

$$\mathbf{A} \bullet (\lambda\, \mathbf{B} \times \mathbf{B}) = 0$$

La razón está muy clara geométricamente: dos vectores paralelos, junto con un vector arbitrario, no determinan un paralelepípedo sino una figura plana cuyo volumen es cero.

Triple producto vectorial

Existe otro producto de tres vectores llamado el *triple producto vectorial*. Tiene la forma

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

El resultado de este producto es obviamente un vector, digamos **D**. Sabemos que el vector **B** × **C** es perpendicular a **B** y a **C**, y como **D** es perpendicular a **B** × **C**, tendremos que **D** caerá en el plano de **B** y **C** (Fig. 31). Se ve inmediatamente que en el triple producto vectorial los paréntesis no se pueden suprimir, puesto que el vector (**A** × **B**) × **C** es un vector muy distinto al vector **A** × (**B** × **C**); el primero cae en el plano de **A** y **B**, y el segundo en el plano de **B** y **C**.

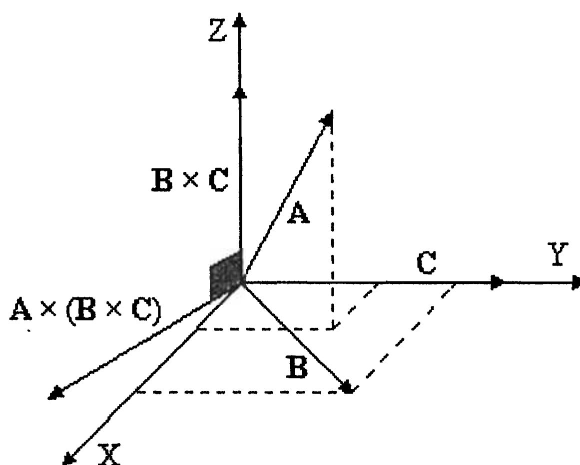


Fig. 31

La siguiente descomposición es sumamente útil:

(23) $$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})\,\mathbf{C}$$

Base recíproca

A toda base vectorial {**a**, **b**, **c**} se le puede asociar una *base recíproca* {**a**′, **b**′, **c**′}, definida por los vectores

(24) $$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{V} \qquad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{V} \qquad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{V}$$

donde

(25) $$V = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

Notemos que

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}' = 1 \qquad \mathbf{b} \bullet \mathbf{b}' = 1 \qquad \mathbf{c} \bullet \mathbf{c}' = 1$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}' = \mathbf{a} \bullet \mathbf{c}' = \mathbf{b} \bullet \mathbf{c}' = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}' = \mathbf{c} \bullet \mathbf{a}' = \mathbf{c} \bullet \mathbf{b}' = 0$$

Por otra parte, definiendo

(26) $\quad V' = \mathbf{a}' \bullet \mathbf{b}' \times \mathbf{c}'$

tenemos

(27) $\quad V' = \dfrac{1}{V}$

Entonces la base recíproca de $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$ es $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Consideremos el problema de expresar el vector arbitrario **d** en la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Se trata de calcular los números λ, μ y ν tales que

$$\mathbf{d} = \lambda\, \mathbf{a} + \mu\, \mathbf{b} + \nu\, \mathbf{c}$$

Multipliquemos ambos miembros escalarmente por un vector perpendicular a los vectores **b** y **c**, por ejemplo, el vector $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$; obtenemos

$$\mathbf{d} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \lambda\, \mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mu\, \mathbf{b} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \nu\, \mathbf{c} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Como los dos últimos términos son iguales a cero, encontramos que

$$\lambda = \frac{\mathbf{d} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$$

Análogamente se encuentra que

$$\mu = \frac{\mathbf{d} \bullet \mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{\mathbf{d} \bullet \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$$

En otra forma,

(28) $\quad \mathbf{d} = (\mathbf{d} \bullet \mathbf{a}')\, \mathbf{a} + (\mathbf{d} \bullet \mathbf{b}')\, \mathbf{b} + (\mathbf{d} \bullet \mathbf{c}')\, \mathbf{c}$

donde $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$ es la base recíproca de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Se advierte de las expresiones para λ, μ y ν que si los vectores **a**, **b** y **c** no forman una base (o sea no son linealmente independientes) no tiene sentido la expresión (28), puesto que $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ y por tanto no existen $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ y $\mathbf{c}'$.

Problemas

1. Demostrar la igualdad del triple producto escalar y el determinante de orden tres:

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

2. Usando la definición (24) de la pág. 27, demostrar que la base recíproca de $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$ es $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

3. Demostrar el desarrollo

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})\,\mathbf{C}$$

mediante sustitución directa de $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, etc. en el primer miembro.

4. Demostrar la fórmula (19) de la pág. 25 (para el área de un polígono plano).

5. Sean A, B, C, D puntos del espacio tridimensional y **A**, **B**, **C**, **D** sus vectores de posición respectivos. Efectuemos una traslación del sistema de coordenadas, en la que el origen O va a dar a O′ (con $\mathbf{OO}' \equiv \mathbf{d}$). Obtener los vectores de posición de A, B, C y D en el nuevo sistema (llámeles **A**′, **B**′, etc.). ¿Cómo se transforma la expresión

$$\mathbf{R} = \frac{\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} + \nu\mathbf{C} + \rho\mathbf{D}}{\lambda + \mu + \nu + \rho} \qquad \lambda, \mu, \nu, \rho > 0$$

y cómo interpretaría Ud el resultado?

6. Un algoritmo computacional eficiente para averiguar si un punto P está incluido en un triángulo ABC consiste en comparar los signos de las áreas de los triángulos ABP, BCP y CPA, dadas por la fórmula (17) de la pág. 25. ¿Cuál sería el criterio de inclusión? Dé un algoritmo para averiguar si un punto P pertenece a un segmento AB.

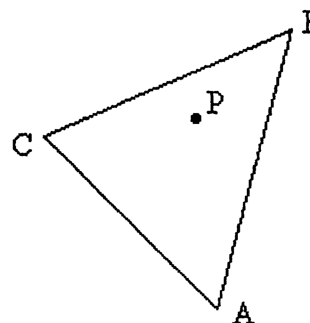


Fig. Probl. 5

7. Hallar un vector unitario **n** perpendicular al plano formado por los vectores

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = -\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$$

(a) A partir de las condiciones $\mathbf{n} \bullet \mathbf{A} = \mathbf{n} \bullet \mathbf{B} = 0$.
(b) Usando el producto vectorial.

8. {**u**, **v**, **w**} es una base ortonormal. Demostrar la representación

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{u})\,\mathbf{u} + (\mathbf{A} \bullet \mathbf{v})\,\mathbf{v} + (\mathbf{A} \bullet \mathbf{v})\,\mathbf{v}$$

¿Cuál es la base recíproca de {**u**, **v**, **w**}?

9. Sean ABCD un tetraedro arbitrario y $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, y $\mathbf{A}_4$ los vectores-área de sus caras, dirigidos convencionalmente hacia fuera del tetraedro. Demostrar que

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4 = \mathbf{0}$$

10. Demostrar que

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})\,(\mathbf{B} \bullet \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{D})\,(\mathbf{B} \bullet \mathbf{C})$$

11. Sean **P**, **Q** y **R** los vectores de posición de tres puntos P, Q, R no colineales. Demostrar que el vector

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \times \mathbf{R} + \mathbf{R} \times \mathbf{P}$$

es perpendicular al plano determinado por P, Q y R.

12. Sean $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ y $\{c_1, c_2, c_3\}$ las representaciones de los vectores **A**, **B** y **C**, respectivamente, en la base {**a**, **b**, **c**}. Demostrar que

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

CAPÍTULO 2 — EL ÁLGEBRA VECTORIAL EN LA GEOMETRÍA CLÁSICA Y ANALÍTICA

2.1 APLICACIONES A LA GEOMETRÍA CLÁSICA

Algunos teoremas de geometría clásica se pueden demostrar mediante métodos vectoriales. Para ello debemos aprender a traducir relaciones geométricas a relaciones vectoriales y viceversa. Consideraremos a continuación un par de entradas de este diccionario. Todos los vectores que manejaremos en esta sección son vectores de posición o vectores separación.

Para empezar, un convenio. En los triángulos, cuadriláteros y polígonos en general escogeremos algún vértice como "origen", desde el cual emanarán los vectores de posición de todos los demás vértices. El vector de posición de un punto cualquiera P se denotará con esa misma letra en negrita, o sea **P**. Por ejemplo, en el triángulo de la Fig. 1 situemos el origen O en un vértice. Entonces **A** y **B** son los vectores mostrados allí. Las frases "punto A" y "punto **A**" significarán lo mismo.

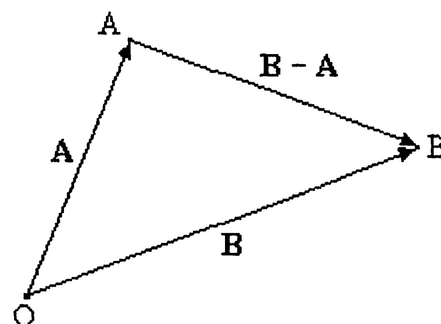


Fig. 1

El vector que une A y B, o sea el vector separación **AB**, es obviamente

(1) $$\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$$

¿Cómo expresamos en forma de relación vectorial el hecho de que el punto C esté contenido en el segmento recto AB? (Véase la Fig. 2). Partimos de

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{AC}$$

y expresamos **AC** en la forma

$$\mathbf{AC} = \lambda\, \mathbf{AB} = \lambda\, (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

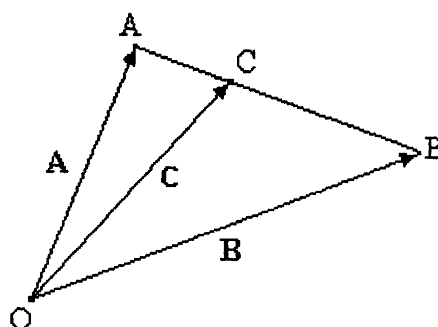


Fig. 2

donde λ es un número positivo y menor que la unidad. Entonces,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \lambda\, (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

o sea que la respuesta a la pregunta recién formulada es

(2) $$\mathbf{C} = (1 - \lambda)\, \mathbf{A} + \lambda\, \mathbf{B} \qquad \text{con } 0 \le \lambda \le 1 \qquad \text{(C está en el segmento AB)}$$

En particular, si C es el punto medio del segmento AB se verifica que

(3) $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ (C es el punto medio del segmento AB)

(Nota. Toda relación de la forma $\mathbf{C} = \mu\,\mathbf{A} + \nu\,\mathbf{B}$, donde μ y ν toman valores entre 0 y 1, inclusive, y $\mu + \nu = 1$, corresponde a un punto C situado en el segmento determinado por A y B. Si se permiten cualesquiera valores para μ y ν, el punto C puede caer fuera del segmento AB.)

Ejemplos

Es mucho lo que podemos hacer con las relaciones (1), (2) y (3). Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero arbitrario forman un paralelogramo (Fig. 3).

Habrá que demostrar las siguientes igualdades vectoriales:

(r1) $\mathbf{M_1M_2} = \mathbf{M_4M_3}$

(r2) $\mathbf{M_1M_4} = \mathbf{M_2M_3}$

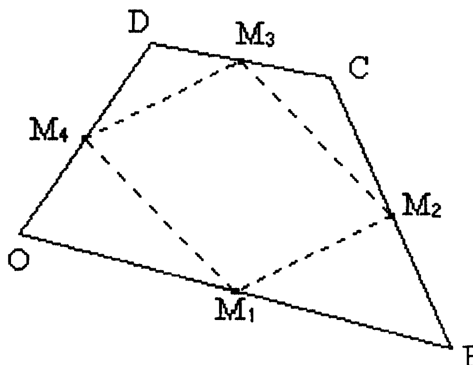


Fig. 3

La ecuación (r1) significa que el segmento M_1M_2 tiene la misma longitud que el segmento M_4M_3, y además que ambos segmentos son paralelos. Cosa análoga significa la ecuación (r2).

Empecemos por expresar los "datos" en forma vectorial. Las siguientes relaciones identifican a M_1, M_2, etc. como los puntos medios de los segmentos OB, BC, etc. (Véase la ecuación (3)). Hemos tomado como origen el vértice O.

(r3) $\mathbf{M_1} = \frac{1}{2}\mathbf{B}$ (r4) $\mathbf{M_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$

(r5) $\mathbf{M_3} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{D})$ (r6) $\mathbf{M_4} = \frac{1}{2}\mathbf{D}$

Ahora bien, $\mathbf{M_1M_2} = \mathbf{M_2} - \mathbf{M_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) - \frac{1}{2}\mathbf{B} = \frac{1}{2}\mathbf{C}$. Del mismo modo obtenemos $\mathbf{M_4M_3} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{D}) - \frac{1}{2}\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{C}$. Tanto $\mathbf{M_1M_2}$ como $\mathbf{M_4M_3}$ son iguales a $\frac{1}{2}\mathbf{C}$, por lo que $\mathbf{M_1M_2} = \mathbf{M_4M_3}$. Lo mismo hacemos para demostrar la relación (r2).

Ejemplo 2. Sean OA y OB dos segmentos rectos que parten del mismo punto O. Tiremos desde los extremos A y B sendas líneas hasta el punto medio del segmento ajeno respectivo (Fig. 4). Demostraremos que el punto de intersección G de estas líneas divide las mismas en una relación de uno a dos.

Sean M_1 y M_2 los puntos medios de OB y OA, respectivamente. Vamos a demostrar que

(r1) $$M_2G = \frac{1}{2}GB = \frac{1}{3}M_2B$$

(r2) $$M_1G = \frac{1}{2}GA = \frac{1}{3}M_1A$$

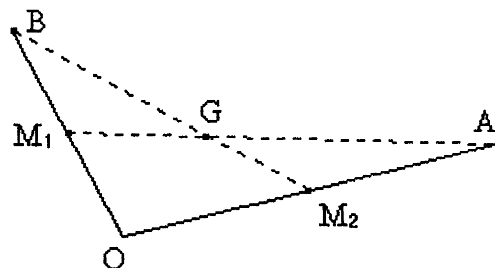


Fig. 4

Escojamos el punto O como el origen de los vectores de posición de todos los puntos (o sea $\mathbf{A} \equiv \mathbf{OA}$, $\mathbf{G} \equiv \mathbf{OG}$, etc.)

Expresemos primeramente los "datos" en forma vectorial:

M_1 es el punto medio de OB: $\mathbf{M_1} = \frac{1}{2}\,\mathbf{B}$

M_2 es el punto medio de OA: $\mathbf{M_2} = \frac{1}{2}\,\mathbf{A}$

El punto G está en la línea AM_1: $\mathbf{G} = (1-\lambda)\,\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{M_1}$

El punto G está en la línea BM_2: $\mathbf{G} = (1-\mu)\,\mathbf{B} + \mu\,\mathbf{M_2}$

(Con respecto a las dos últimas relaciones consulte la ecuación (2)).

Las dos expresiones para **G** insinúan que las igualemos, y las expresiones para $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$ insinúan que las sustituyamos en las demás. Respondiendo a estas insinuaciones,

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda-\mu\right)\mathbf{A} + \left(\lambda-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu\right)\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Como **A** y **B** son linealmente independientes, sus respectivos coeficientes en esta ecuación deben ser iguales a cero:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda-\mu = 0 \qquad\qquad \lambda-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu = 0$$

Se encuentra $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$. Entonces $\mathbf{G} = \frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{2}{3}\mathbf{M_1} = \frac{1}{3}\mathbf{B} + \frac{2}{3}\mathbf{M_2}$. De aquí es fácil llegar a (r1) y (r2).

Ejemplo 3. Expresar la altura de un triángulo rectángulo en términos de los catetos, considerados todos como vectores.

En la Fig. 5 hemos trazado el triángulo rectángulo OAB y su altura OH, perpendicular a la hipotenusa AB.

Tomemos el punto O como origen de los vectores de posición de todos los puntos. Entonces los catetos son los vectores **A** y **B** y la altura es el vector **H**. Deseamos expresar **H** en términos de **A** y **B**.

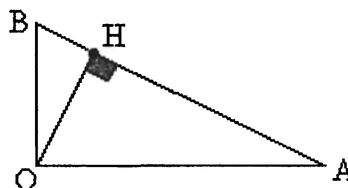


Fig. 5

Los datos del problema son los siguientes:

OAB es un triángulo rectángulo: (r1) $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 0$

OH es una altura de este triángulo: (r2) $\mathbf{H} \bullet \mathbf{AB} = \mathbf{H} \bullet (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 0$

El punto H está sobre el segmento AB: (r3) $\mathbf{H} = (1 - \lambda)\, \mathbf{A} + \lambda\, \mathbf{B}$

El problema consiste en calcular la constante λ. Poniendo la expresión (r3) para **H** en la expresión (r2) y usando la (r1) obtenemos

$$\mathbf{H} \bullet (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = [(1 - \lambda)\, \mathbf{A} + \lambda\, \mathbf{B}] \bullet (\mathbf{B} - \mathbf{A}) =$$

$$= - A^2 + \lambda\, A^2 + \lambda\, B^2 = 0$$

de donde

$$\lambda = \frac{A^2}{A^2 + B^2} \qquad y \qquad 1 - \lambda = \frac{B^2}{A^2 + B^2}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{H} = \frac{B^2}{A^2 + B^2}\mathbf{A} + \frac{A^2}{A^2 + B^2}\mathbf{B}$$

Otro modo de escribirla es

$$\mathbf{H} = \operatorname{sen}^2 \theta_A\, \mathbf{A} + \operatorname{sen}^2 \theta_B\, \mathbf{B}$$

donde θ_A y θ_B son los ángulos que forman los catetos **A** y **B** con la hipotenusa.

Ejemplo 4. Demostrar que las tres alturas de un triángulo se intersecan en un mismo punto H (denominado *ortocentro*). Obtener una expresión vectorial para calcular la posición del ortocentro a partir de las posiciones de los vértices (Fig. 6).

Tomemos el punto O como el origen para expresar los vectores de posición de todos los demás puntos, es decir, **OH** = **H**, **OA** = **A**, **OB** = **B**, etc.

Expresemos los datos del problema vectorialmente:

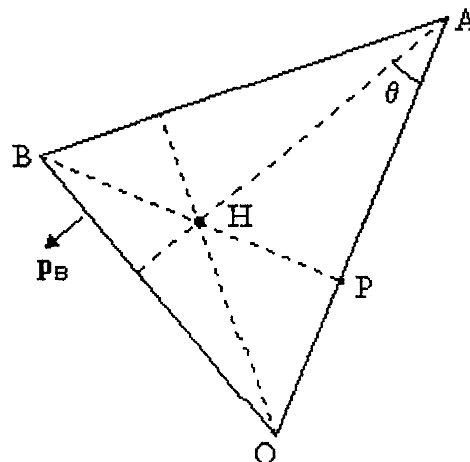


Fig. 6

HA es perpendicular al lado OB: $(\mathbf{A} - \mathbf{H}) \bullet \mathbf{B} = 0$

HB es perpendicular al lado OA: $(\mathbf{B} - \mathbf{H}) \bullet \mathbf{A} = 0$

De estas relaciones se obtiene $\mathbf{H} \bullet (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 0$, esto es, que OH es perpendicular al lado AB y por tanto OH es la tercera altura del triángulo. Convénzase ahora de que con ello también queda demostrado que las tres alturas pasan por H.

Procedamos a obtener el vector **H** en términos de **A** y **B**. Escribamos

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{AH} = \mathbf{A} + \lambda\, \mathbf{p_B}$$

donde "$\mathbf{p_B}$" es un vector unitario perpendicular[6] al vector **B** y $\lambda = |\mathbf{AH}|$. Ahora bien, la longitud del vector **AH** es

$$\mathrm{AH} = \lambda = \frac{\mathrm{AP}}{\cos\theta} = \frac{(\mathbf{A}-\mathbf{B})\bullet \dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}}{-\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}\bullet \mathbf{p_B}} = \frac{(\mathbf{B}-\mathbf{A})\bullet \mathbf{A}}{\mathbf{A}\bullet \mathbf{p_B}}$$

Entonces el vector **H** solicitado es

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} + \left\{\frac{\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}-\mathbf{A})}{\mathbf{A}\bullet \mathbf{p_B}}\right\}\mathbf{p_B}$$

¿Qué pasa si intercambiamos $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ en esta relación, junto con $\mathbf{p_B} \rightarrow \mathbf{p_A}$? ¿Cómo queda si en lugar de vértices O, A, B trabajamos con vértices A, B, C, todos distintos del origen O?

---

[6] Si el vector **B** es digamos $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$, un vector perpendicular es $\mathbf{p_B} = (-b_2, b_1)$.

Problemas

1. En la figura, las seis divisiones del lado BC miden lo mismo.

Tome el punto O como origen para los vectores de posición de los demás puntos y haga ver que

$$\mathbf{D} = \frac{5}{6}\mathbf{C} + \frac{1}{6}\mathbf{B}$$

(**D** "se parece más" a **C** que a **B**, por ello el factor de **C** es mayor).
Escriba análogamente por inspección el vector **E** en términos de **B** y **C**.

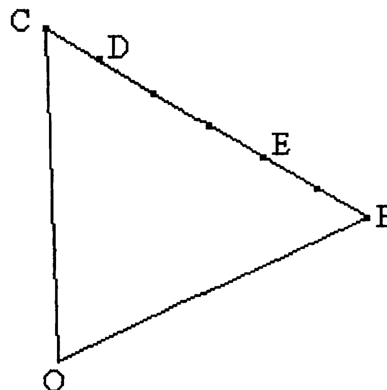


Fig. Probl. 1

2. ABCD es un paralelogramo. M es el punto medio del lado AD. En el punto E se intersecan la diagonal AC y el segmento BM. Demostrar que

$$\mathbf{AE} = \frac{1}{3}\mathbf{AC}$$

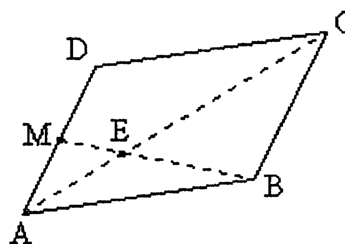


Fig. Probl. 2

3. Demostrar que las medianas de un triángulo se intersecan en un mismo punto G, el cual divide a cada mediana en una relación de uno a dos. Demuestre que si **A, B** y **C** son los vértices del triángulo, entonces

$$\mathbf{G} = \frac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \tag{4}$$

El punto G se denomina el *baricentro* o *centroide* del triángulo. Si el triángulo es una lámina plana homogénea, G es su centro de gravedad.
Sugerencia. Use el resultado del Ejemplo 2. Complete en la Fig. 4 el triángulo OAB uniendo A y B. Sea M_3 el punto medio del lado AB. Demuestre que los puntos O, G y M_3 están sobre una línea recta. Luego obtenga (4) renombrando los vértices.

4. Demuestre que las medianas de un triángulo se pueden acomodar (trasladarse) de modo que formen un triángulo.

5. Demuestre que en un paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de dos lados no paralelos.

6. Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se intersecan en un punto que las divide ambas a la mitad.

7. Sea ABC un triángulo con baricentro G, y P un punto arbitrario del plano (o del espacio). Demuestre que la expresión

$$(AP)^2 + (BP)^2 + (CP)^2 - 3\,(SP)^2$$

tiene un valor independiente de la ubicación de P.
Sugerencia. Escoja un punto O fijo del plano como origen de los vectores de posición. Use la ecuación (4) del problema 3 para demostrar que la expresión vale

$$\frac{2}{3}(A^2 + B^2 + C^2 - \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} - \mathbf{A} \bullet \mathbf{C} - \mathbf{B} \bullet \mathbf{C})$$

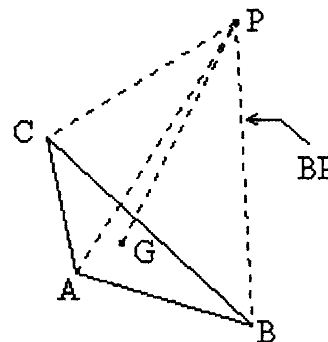


Fig. Probl. 7

8. ABCD es un trapecio y S es el punto de intersección de sus diagonales AC y BD. Se traza el segmento MSN paralelo a DC. Demostrar que

$$MS = SN$$

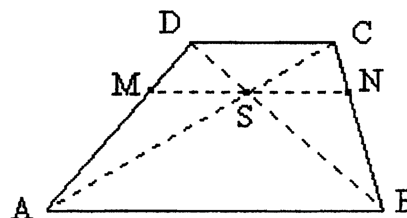


Fig. Probl. 8

9. El centro del círculo circunscrito a un triángulo es el punto de intersección de las mediatrices, que son las rectas trazadas desde los puntos medios de cada lado, perpendicularmente a cada uno.

Encuentre una expresión vectorial para el vector de posición del circuncentro.
Sugerencia. Introduzca vectores perpendiculares a los lados, tal como se hizo en el Ejemplo 4.

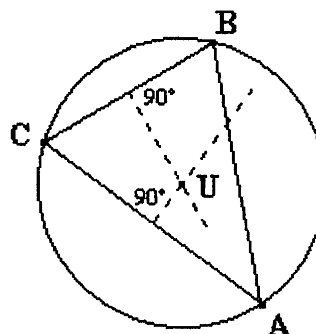


Fig. Probl. 9

2.2 Aplicaciones a la geometría analítica

Ecuaciones paramétricas de la recta

Una recta L viene determinada por alguno de sus puntos, **A**, y por su orientación, misma que la de un vector **a** que llamaremos el "vector orientador" de la recta (Fig. 7). El vector orientador puede ser unitario o no.

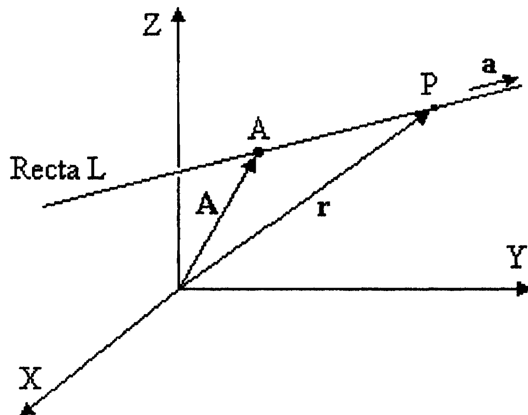


Fig. 7

Vectorialmente, tal recta L se describe mediante la relación

(5) $$\mathbf{r} = \mathbf{A} + t\,\mathbf{a}$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es un punto P arbitrario o "variable" de la recta, y "t" es un parámetro que toma valores

$$t \in (-\infty, \infty)$$

La relación (5) se puede interpretar así: Para llegar al punto **P** ó **r**, a partir del origen O, nos vamos primero al punto A, y luego añadimos un múltiplo "t **a**" del vector **a**. Esto se descubre fácilmente en la Fig. 7.

Observe la Fig. 8. Para obtener la ecuación vectorial de la recta que pasa por dos puntos dados **A** y **B** notemos que el vector orientador es el vector **AB**. Entonces,

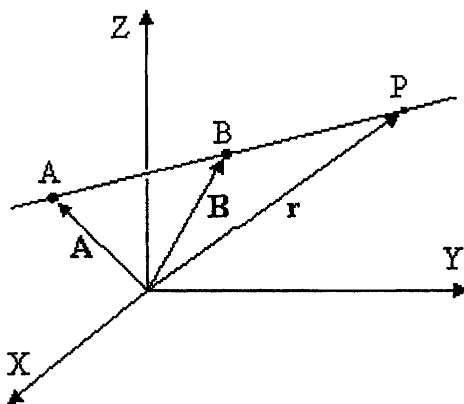


Fig. 8

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + t\,\mathbf{AB}$$

o bien, poniendo $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$,

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + t\,(\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

o también

(6) $$\mathbf{r} = (1 - t)\,\mathbf{A} + t\,\mathbf{B}$$

(Compare (6) con la ecuación inmediatamente anterior a (2)).

El valor $t = 0$ corresponde según (6) al punto $\mathbf{r} = \mathbf{A}$, el valor $t = 1$ al punto $\mathbf{r} = \mathbf{B}$. Para valores $t \notin [0, 1]$ obtenemos puntos fuera del segmento AB. ¿Qué puntos se obtienen para valores de t menores que 0? ¿mayores que 1?

Ejemplo 5. Deseamos averiguar bajo qué condiciones se intersecan las rectas

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + t\,\mathbf{a} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{B} + s\,\mathbf{b}$$

cuyos parámetros son "t" y "s" y cuyos vectores orientadores son "**a**" y "**b**", respectivamente. La primera recta pasa por el punto **A**, la segunda por **B** (Fig. 9).

Supongamos que efectivamente se intersequen en cierto punto **Q**. Sean $t = t_1$ y $s = s_1$ los valores de los parámetros correspondientes a **Q** según cada recta, es decir,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} + t_1\,\mathbf{a}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B} + s_1\,\mathbf{b}$$

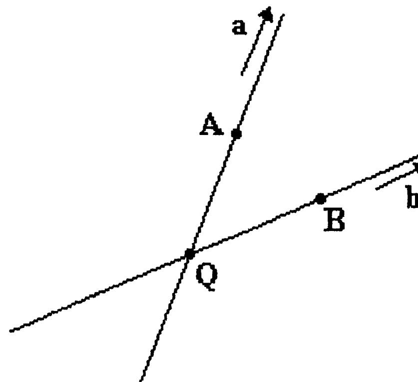


Fig. 9

Se sigue la relación

$$\mathbf{A} + t_1\,\mathbf{a} = \mathbf{B} + s_1\,\mathbf{b}$$

De ella se deriva

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = t_1\,\mathbf{a} - s_1\,\mathbf{b}$$

o bien

(7) $$\mathbf{AB} = t_1\,\mathbf{a} - s_1\,\mathbf{b}$$

Hemos obtenido así que para que haya intersección, el vector **AB** debe ser una combinación lineal de los vectores **a** y **b**. En otras palabras, **AB**, **a** y **b** deben ser *coplanarios*.

Ejemplo numérico.

Hallaremos el punto de intersección de las rectas $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A} + t\mathbf{a}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{B} + s\mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = (0, 4, 1)$, $\mathbf{a} = (3, 1, -4)$ y $\mathbf{B} = (-3, -4, 9)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 0)$.

Se tiene $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (-3, -4, 9) - (0, 4, 1) = (-3, -8, 8)$. Imponiendo la condición (7) tenemos $(-3, -8, 8) = t\,(3, 1, -4) - s\,(1, -2, 0)$, que nos proporciona las relaciones

$$-3 = 3t - s \qquad -8 = t + 2s \qquad 8 = -4t$$

Si estas relaciones son consistentes, existe intersección. La última nos da $t = -2$. Sustituyendo en la segunda, $s = -3$. Se comprueba que se satisface la primera, es decir, hay consistencia. El punto de intersección se obtiene como el valor de **r** correspondiente a $t = -2$ (o el de **r** correspondiente a $s = -3$) y resulta ser el punto $(-6, 2, 9)$.

Ejemplo 6. Calcular la distancia de la recta $\mathbf{r} = \mathbf{A} + t\,\mathbf{a}$ al origen de coordenadas.

La distancia "D" entre el origen y un punto P *arbitrario* de la recta es igual a la magnitud del vector de posición $\mathbf{P} \equiv \mathbf{r}$. Obtengamos el cuadrado de dicha distancia:

$$D^2 = \mathbf{r} \bullet \mathbf{r} = (\mathbf{A} + t\,\mathbf{a}) \bullet (\mathbf{A} + t\,\mathbf{a}) =$$

$$= \mathbf{A} \bullet \mathbf{A} + 2\,t\,\mathbf{A} \bullet \mathbf{a} + t^2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = A^2 + 2\,t\,\mathbf{A} \bullet \mathbf{a} + t^2 a^2$$

donde A y "a" son las magnitudes de los vectores **A** y **a**.

La distancia de la recta al origen es el valor mínimo de D. Como el mínimo de D corresponde al mínimo de D^2 impondremos la condición

$$\frac{dD^2}{dt} = 0$$

Tenemos

$$\frac{dD^2}{dt} = 2\mathbf{A} \bullet \mathbf{a} + 2\,t\,a^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = -\frac{\mathbf{A} \bullet \mathbf{a}}{a^2}$$

Sustituyendo este valor de "t" en la expresión obtenida arriba para D^2,

$$D^2 = A^2 + 2\left(-\frac{\mathbf{A} \bullet \mathbf{a}}{a^2}\right)\mathbf{A} \bullet \mathbf{a} + \left(-\frac{\mathbf{A} \bullet \mathbf{a}}{a^2}\right)^2 a^2$$

$$D^2 = A^2 - \frac{(\mathbf{A} \bullet \mathbf{a})^2}{a^2}$$

Finalmente,

$$D = \sqrt{A^2 - \frac{(\mathbf{A} \bullet \mathbf{a})^2}{a^2}} \qquad (8)$$

En virtud de la desigualdad $(\mathbf{A} \bullet \mathbf{a})^2 \leq A^2 a^2$, el radicando es no-negativo.

En términos del ángulo θ que forman los vectores **A** y **a**, la distancia D es

$$D = A \operatorname{sen} \theta$$

Si la recta se da en la forma $\mathbf{r} = \mathbf{A} + t\,\mathbf{n}$, con $|\mathbf{n}| = 1$, la distancia es $D = \sqrt{A^2 - A_n^2}$, donde A_n es la componente de **A** a lo largo de **n**. Haga una figura que revele esta expresión trivialmente.

Ejemplo 7. ¿Qué lugar geométrico describe el punto medio de un segmento recto de longitud fija que se desliza sobre dos rectas perpendiculares?

Supongamos que los ejes X y Y son las rectas perpendiculares dadas. Sean P y Q puntos variables de los ejes X y Y, respectivamente, y M el punto medio del segmento PQ (Fig. 10). Ambos ejes contienen al origen **0** y sus vectores orientadores son respectivamente **i** y **j**, de modo que las ecuaciones paramétricas de los ejes X y Y son

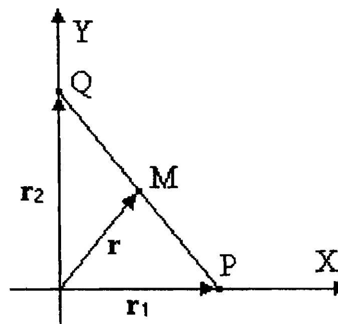


Fig. 10

$$\mathbf{r}_1 = t\,\mathbf{i} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_2 = s\,\mathbf{j}$$

El punto medio M viene dado por $\mathbf{M} \equiv (x, y) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}(t\,\mathbf{i} + s\,\mathbf{j})$, con la condición $PQ = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \text{constante} \equiv c$, o bien

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 = |s\,\mathbf{j} - t\,\mathbf{i}|^2 = t^2 + s^2 = c^2$$

Como $t = 2x$ y $s = 2y$, las coordenadas (x, y) satisfacen $4x^2 + 4y^2 = c^2$, que es la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio $c/2 = PQ/2$.

Ejemplo 8. Calcular la distancia entre las rectas $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}_1 + t_1\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{A}_2 + t_2\,\mathbf{a}_2$.

El cuadrado de la distancia D entre sendos puntos *cualesquiera* de las rectas es

$$D^2 = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = |\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 + t_2\mathbf{a}_2 - t_1\mathbf{a}_1|^2$$

La distancia d entre las rectas es el valor mínimo de "D". Las condiciones del cálculo diferencial para la existencia de un mínimo, $\frac{\partial D^2}{\partial t_1} = 0$, $\frac{\partial D^2}{\partial t_2} = 0$, conducen a

$$2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet \frac{\partial(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\partial t_1} = 0 \qquad\qquad 2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet \frac{\partial(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\partial t_2} = 0$$

que se traducen en

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet \mathbf{a}_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet \mathbf{a}_2 = 0$$

o sea que $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ *deben ser perpendiculares al vector* $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ correspondiente a D mínima, como se señala en la Fig. 11.

Distinguiremos dos casos. En el primero supondremos que los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son paralelos (Fig. 12). Para obtener "d" en este caso, simplemente proyectamos el vector separación $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ sobre un vector unitario $\mathbf{n}$ situado en el plano de ambas rectas y además perpendicular a $\mathbf{a}_1$ ó a $\mathbf{a}_2$.

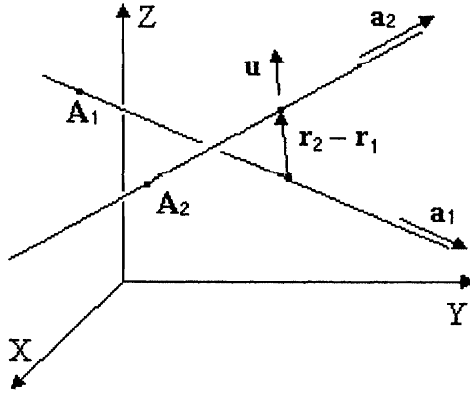


Fig. 11

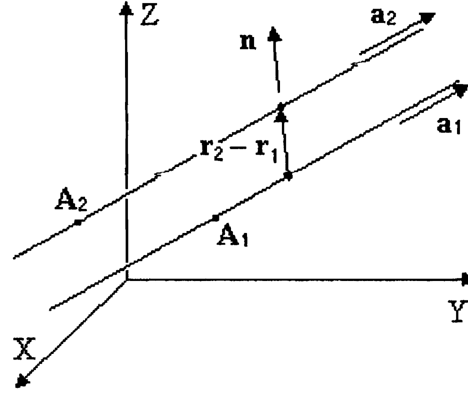


Fig. 12

Sea $\mathbf{N} \equiv \lambda\,(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) + \mathbf{a}_1$ un vector en el plano de las dos rectas, perpendicular a $\mathbf{a}_1$, o sea

$$\mathbf{N} \bullet \mathbf{a}_1 = 0 = \lambda\,(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \bullet \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{a}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \bullet \mathbf{a}_1}{a_1^2}$$

Entonces la distancia es $d = |(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \bullet \mathbf{n}|$, donde $\mathbf{n}$ es el unitario en la dirección de $\mathbf{N}$.

En el segundo caso suponemos que $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ no son paralelos y que las rectas no se intersecan, es decir, $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ no está en el plano de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ (consulte la ecuación (7)).

En este caso la distancia "d" entre ambas rectas es la proyección del vector $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ sobre un vector unitario $\mathbf{u}$ en la dirección del vector mínimo $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, o sea $\dfrac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}$,

$$d = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \bullet \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}$$

(Un modo algebraico de llegar a esta expresión es poniendo $\mathbf{u}\ d = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, donde $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ corresponden al mínimo de "d" (Fig. 11). Multiplicando esta ecuación escalarmente por $\mathbf{u}$ se obtiene $d = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet \mathbf{u}$. Luego tomamos en consideración que $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}_1 + t_{1c}\,\mathbf{a}_1$ y que $\mathbf{r}_2 = \mathbf{A}_2 + t_{2c}\,\mathbf{a}_2$, donde t_{1c} y t_{2c} son valores apropiados de los parámetros t_1 y t_2. Se sigue que $\mathbf{r}_1 \bullet \mathbf{u} = \mathbf{A}_1 \bullet \mathbf{u} + t_{1c}\,\mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{u} = \mathbf{A}_1 \bullet \mathbf{u}$, puesto que $\mathbf{a}_1$ es perpendicular a $\mathbf{u}$. Se obtiene entonces $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \bullet \mathbf{u} = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \bullet \mathbf{u}$.)

Problemas

1. Obtener la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto **A** y es paralela a la recta **r** = **B** + t **c**.

2. Hallar una representación paramétrica de la recta cuya distancia al origen de coordenadas es D, y tal que forma ángulo α con el eje X. Encuentre también el punto **A** que es la proyección ortogonal del origen O sobre la recta.

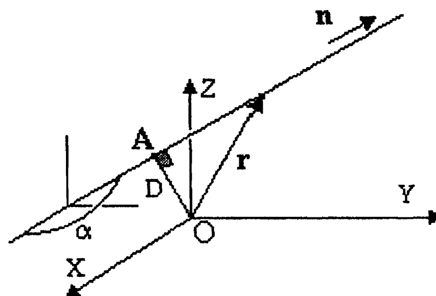


Fig. Probl. 2

3. Hallar la distancia entre las rectas

$$\mathbf{r} = (2, -3, 4) + t\,(1, 0, 3) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r} = (-1, 4, 5) + s\,(2, 4, -7)$$

4. Obtener una fórmula para la distancia del punto **C** = (c_x, c_y, c_z) a la recta **r** = **A** + t **a**.

5. ¿Qué condición debe satisfacerse para que las rectas

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + t\,\mathbf{a} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{B} + s\,\mathbf{b} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{C} + u\,\mathbf{c}$$

estén en un plano? t, s y u son los parámetros.

6. **P** es un punto del plano y **r** = **A** + t **a** es una recta. **P** no pertenece a ésta. Obtener el punto **M** que es la proyección ortogonal de **P** sobre la recta.

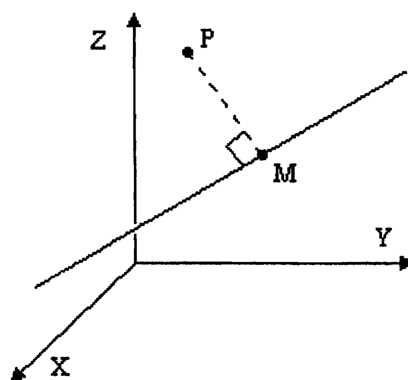


Fig. Probl. 6

Ecuaciones paramétricas del plano

Se requiere de dos parámetros, "t" y "s", para parametrizar un plano.

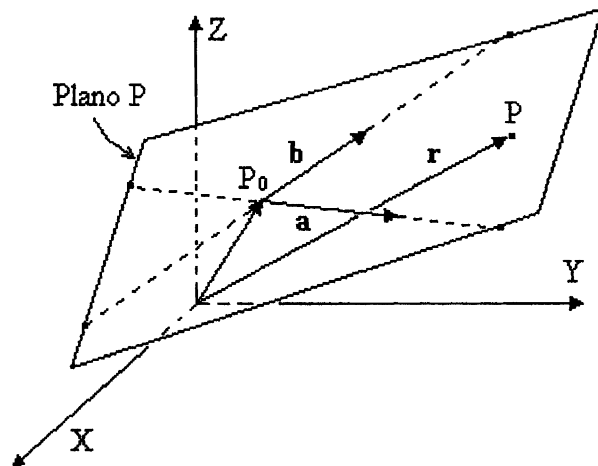


Fig. 13

Sea P_0 un punto determinado del plano y sean **a** y **b** dos vectores contenidos en el plano, no paralelos. El punto **r** del plano se obtiene de la relación $\mathbf{r} = \mathbf{P_0} + \mathbf{P_0P}$, escribiendo $\mathbf{P_0P}$ como una combinación lineal de los vectores **a** y **b**,

(9) $$\mathbf{r} = \mathbf{P_0} + t\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b}$$

La pareja {t, s} constituye una especie de "coordenadas oblicuas" de los puntos del plano. El punto P_0 tiene coordenadas {0, 0}. Para los valores s = 0 y "t" variable se obtienen los puntos del plano que satisfacen $\mathbf{r} = \mathbf{P_0} + t\,\mathbf{a}$, cuyo lugar geométrico es la recta que pasa por P_0 y que está orientada al igual que **a**. Análogamente, las parejas {0, s} dan la recta a través de P_0 y orientada según el vector **b**.

Ejemplo 9. Obtener la traza del plano (9) sobre el plano XY.

La intersección del plano (9) con el plano XY consta de todos los puntos cuya coordenada "z" es igual a 0. De (9) tenemos en general $z = z_0 + t\,a_z + s\,b_z$. Igualando "z" a cero se obtiene una relación entre los parámetros, a saber $z_0 + t\,a_z + s\,b_z = 0$, de tal modo que sólo uno de ellos es independiente. Escogiendo "t" como tal expresamos "s" en la forma $s = -\frac{z_0 + t\,a_z}{b_z}$ y lo sustituimos en (9). Obtenemos así la recta-intersección:

$$\mathbf{r} = \mathbf{P_0} + t\,\mathbf{a} - \frac{z_0 + t\,a_z}{b_z}\mathbf{b}$$

Ejemplo 10. En geometría analítica, la ecuación del plano tiene la forma general

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Esta ecuación se puede poner en forma vectorial (llamada *forma normal de Hesse*) así:

(10) $\mathbf{N} \bullet \mathbf{r} = -D$

donde definimos el vector

(11) $\mathbf{N} \equiv (A, B, C)$

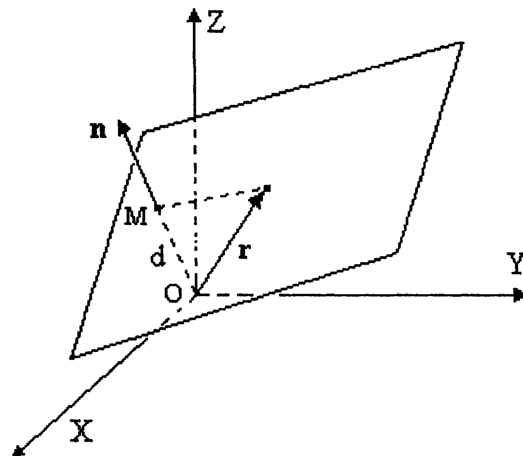


Fig. 14

y $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es el punto variable del plano.

La interpretación de (10) la tenemos en la Fig. 14: definiendo un vector unitario **n** perpendicular al plano dado, tendremos que la proyección de **r** sobre **n** es constante, igual en valor absoluto a la distancia "d" del plano al origen, o sea $\mathbf{r} \bullet \mathbf{n} = \pm d$. Comparando esto con (10) vemos que $\mathbf{N} \equiv N\,\mathbf{n}$ es un vector normal al plano, y se sigue también que $|-\frac{D}{N}|$ es la distancia del plano al origen.

La distancia del punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano $\mathbf{N} \bullet \mathbf{r} = -D$, indicada con L en la Fig. 15, es la proyección de $\mathbf{r}_1$ sobre **n**, disminuída en el segmento OM = d = –D/N,

$$L = \mathbf{r}_1 \bullet \mathbf{n} + D/N$$

Cuando la ecuación del plano se da en la forma Ax + By + Cz + D = 0, la distancia L se transforma en

$$L = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

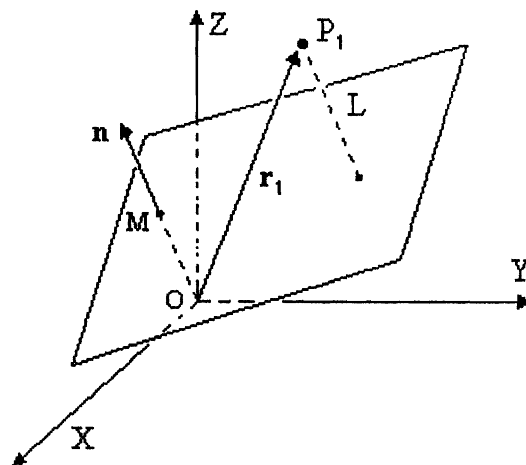


Fig. 15

Ejemplo 11. Obtener la recta intersección de los planos $4x - 5y + z = 2$ y $2x + y + 3z = 6$.

Escribamos la ecuación de la recta-intersección en la forma $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$, con **a** y **b** a determinar. Como **a** es un punto de la recta-intersección (correspondiente a $t = 0$), debe satisfacer las ecuaciones de ambos planos. Entonces

$$4a_x - 5a_y + a_z = 2 \qquad\qquad 2a_x + a_y + 3a_z = 6$$

Escogiendo arbitrariamente $a_z = 1$ hallamos $a_x = \frac{17}{14}$ y $a_y = \frac{4}{7}$, o sea $\mathbf{a} = \left(\frac{17}{14}, \frac{4}{7}, 1\right)$.

Por otra parte, el vector orientador de la recta, **b**, pertenece a ambos planos y es por tanto perpendicular a ambos vectores normales $\mathbf{N}_1 = (4, -5, 1)$ y $\mathbf{N}_2 = (2, 1, 3)$. Entonces

$$\mathbf{b} \bullet \mathbf{N}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4b_x - 5b_y + b_z = 0$$

$$\mathbf{b} \bullet \mathbf{N}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b_x + b_y + 3b_z = 0$$

Tomemos arbitrariamente $b_z = 1$. Hallamos $b_x = -\frac{8}{7}$ y $b_y = -\frac{5}{7}$, o sea $\mathbf{b} = \left(-\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, 1\right)$. La ecuación de la recta solicitada es $\mathbf{r} = \left(\frac{17}{14}, \frac{4}{7}, 1\right) + \left(-\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, 1\right) t$.

Ejemplo 12. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al plano $\mathbf{r} \bullet \mathbf{c} = g$ y que contiene a la recta intersección de los planos $\mathbf{r} \bullet \mathbf{a} = e$ y $\mathbf{r} \bullet \mathbf{b} = f$.

La familia de planos que contiene a la recta-intersección puede representarse mediante la ecuación

(r1) $\qquad \mathbf{r} \bullet \mathbf{a} - e + \lambda\,(\mathbf{r} \bullet \mathbf{b} - f) = 0 \qquad (\lambda$ arbitrario, pero $\neq 0)$

Ello se puede advertir más claramente poniendo (r1) en la forma normal de Hesse,

(r2) $\qquad \mathbf{r} \bullet (\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b}) = e + \lambda\,f$

Está claro que los puntos "**r**" que satisfacen (r2) forman un plano y, por (r1), que dicho plano contiene a la recta intersección de los planos $\mathbf{r} \bullet \mathbf{a} = e$ y $\mathbf{r} \bullet \mathbf{b} = f$. Vemos en (r2) que el vector normal del miembro "λ" de la familia antedicha es $\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b}$. Este vector normal debe ser también perpendicular al vector normal del plano $\mathbf{r} \bullet \mathbf{c} = g$. Entonces

$$(\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = 0 \qquad \text{de donde} \qquad \lambda = -\frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{c}}{\mathbf{b} \bullet \mathbf{c}}.$$

Sustituyendo en (r2) se obtiene ya la ecuación deseada,

$$\mathbf{r} \bullet \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{c}}{\mathbf{b} \bullet \mathbf{c}}\mathbf{b}\right) = e - \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{c}}{\mathbf{b} \bullet \mathbf{c}} f$$

Problemas

1. Demostrar que la distancia D del plano $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + s\,\mathbf{c}$ al origen de coordenadas viene dada por

$$D^2 = a^2 + \frac{2(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})(\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})^2 b^2 + (\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})^2 b^2}{b^2c^2 - (\mathbf{b}\bullet\mathbf{c})^2}$$

Sugerencia. No es necesario usar el cálculo diferencial. Defina t_m y s_m como los valores de los parámetros correspondientes al punto **D**, es decir, $\mathbf{D} = \mathbf{a} + t_m\,\mathbf{b} + s_m\,\mathbf{c}$.
Encuentre t_m y s_m de las condiciones $\mathbf{D}\bullet\mathbf{b} = 0$ y $\mathbf{D}\bullet\mathbf{c} = 0$. Para simplificar luego el cálculo de D, note que

$$D^2 = \mathbf{D}\bullet\mathbf{D} = \mathbf{D}\bullet\mathbf{a}$$

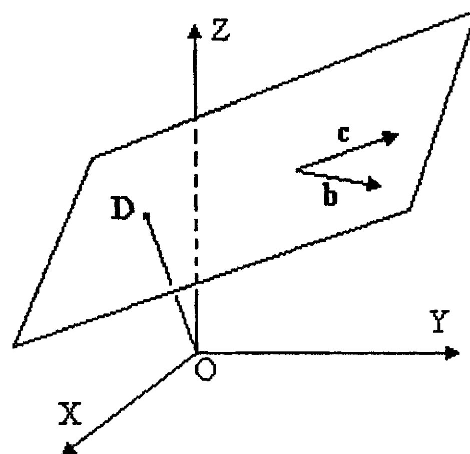


Fig. Probl. 1

2. Hallar la ecuación del plano que contiene al punto **A** y es perpendicular a la recta $\mathbf{r} = \mathbf{b} + t\,\mathbf{c}$.

3. Calcular el punto de intersección de la recta $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ y el plano $\mathbf{r}\bullet\mathbf{c} = d$. Calcular también el ángulo que forma esta recta con dicho plano.
Sugerencia. Ponga t_P = valor del parámetro t para el punto-intersección "P". Obtenga t_P y sustitúyalo en la ecuación de la recta. Debe encontrar $\mathbf{r}_P = \mathbf{a} + \frac{d - (\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})}{\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}}\,\mathbf{b}$.

4. Una familia de planos posee la misma distancia D al origen. Sean a, b y c (variables) los segmentos determinados sobre los ejes coordenados por los planos de la familia. Demostrar que

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \text{constante}$$

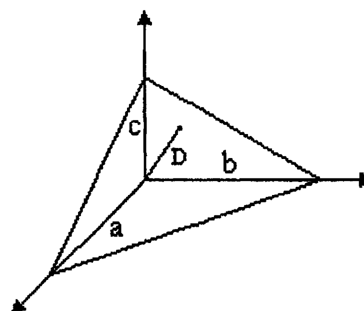


Fig. Probl. 4

5. Calcular la distancia del punto **P** al plano **r** • **N** = c.

6. Tres puntos P(x, y), A(a_1, a_2) y B(b_1, b_2) están en el plano XY. Demostrar que un criterio para que P pertenezca al segmento AB es

$$-(x-a_1)(b_2-a_2)+(y-a_2)(b_1-a_1)=0$$

con

$$d(P, A)+d(P, B) \leq AB$$

donde d(P, A) es la distancia de P a A.

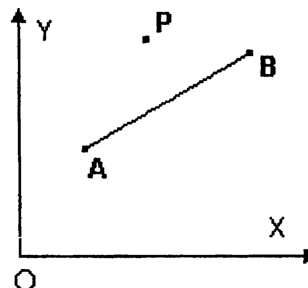


Fig. Probl. 6

7. Hallar la ecuación del plano determinado por los puntos

A(– 1, 2, 4) B(0, 3, – 5) C(2, – 3, 1)

CAPÍTULO 3	VECTORES FÍSICOS

3.1 INTRODUCCIÓN

Las cantidades físicas que poseen una magnitud y una dirección son vectores. Existen otras clases de cantidades físicas, denominadas tensores, algunos de los cuales poseen propiedades direccionales más complejas. Nos ocuparemos de ellas a partir del capítulo 4.

Para definir una cantidad física vectorial es necesario:

- Convenir en las unidades físicas
- Estipular el "marco de referencia"
- Describir un procedimiento para medir o calcular la magnitud y dirección de la cantidad física, o bien dar el significado de sus componentes.

Para el punto anterior es menester:

- Introducir un sistema de coordenadas

Según nuestra elección de unidades, marco de referencia y sistema de coordenadas, las cantidades físicas se expresarán numéricamente de distintas maneras. Sin embargo, todas estas representaciones numéricas o "analíticas" deben desembocar en un mismo significado físico. Por ejemplo, es obvio que los números serán distintos según las unidades de medida utilizadas. Así, el valor de velocidad 36 km/h, si bien es distinto del valor convertido a metros por segundo, o sea 10 m/s, significa físicamente lo mismo que éste.

Los sistemas de coordenadas se emplean para expresar numéricamente la dirección de la cantidad física, y para definir sus "componentes". Los sistemas más simples son los cartesianos, y son los que usaremos inicialmente. El vector físico se representa geométricamente por una flecha, cuya longitud corresponde a la magnitud del vector, y cuya dirección es directamente la dirección del vector. Las proyecciones algebraicas de la flecha sobre los ejes coordenados son las componentes del vector. El vector posee tres componentes que se escriben como ternas ordenadas de números reales en la forma

(1) $$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

Las componentes ya no son números reales puros, sino productos de números reales por unidades físicas. Las unidades físicas son símbolos algebraicos como "m", "kg", etc., sujetos a las mismas reglas algebraicas de los números reales.

En lo que respecta al manejo de las unidades de las componentes de un vector físico, podemos optar entre dos procedimientos. En el primero trabajamos con ternas (a_x, a_y, a_z) desprovistas de unidades, pero tenemos cuidado de conservar la homogeneidad

de las unidades en toda ecuación. Conforme al segundo procedimiento incluímos las unidades como símbolos algebraicos. Por ejemplo, un vector velocidad podría ser el siguiente:

$$\mathbf{v} = \left(5\frac{m}{s}, -2\frac{m}{s}, 8\frac{m}{s}\right)$$

De acuerdo con la regla $\lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$, podemos sacar la unidad $\frac{m}{s}$ como "factor común" y escribir $\mathbf{v} = (5, -2, 8)\frac{m}{s}$.

Si modificamos el sistema de coordenadas, trasladándolo y rotándolo, las componentes del vector cambiarán. Sin embargo, las componentes del vector en el nuevo sistema trasladado y girado deben describir la misma situación física que antes. Parte de nuestra tarea en este capítulo será el estudiar cómo se transforman las componentes cuando se modifica el sistema de coordenadas. El criterio para descubrir esta transformación estriba en que los vectores físicos describen fenómenos o situaciones físicas asociadas en último nivel con el llamado "marco de referencia", que son los objetos materiales que subyacen a toda medición física.

3.2 Vectores físicos y marco de referencia

Con objeto de comprender cabalmente una cualidad de que goza toda cantidad física vectorial, la de tener un significado independiente de su modo de representación numérica, es necesario introducir previamente un concepto sumamente importante, el de marco de referencia.

La necesidad de este concepto se hace muy evidente ya desde la idea de movimiento. Todo movimiento constituye una relación entre al menos dos cuerpos. Uno de ellos es el *móvil*, cuyo movimiento se desea describir y explicar, y el otro es el *marco de referencia* o *referencial*, cuerpo o "plataforma" desde donde se realizan las observaciones.

El referencial es algún cuerpo rígido que se adopta como soporte (material y conceptual) para la determinación experimental de todas las cantidades físicas referentes al móvil. Esto es, en el referencial se *fijan* los instrumentos y aparatos de medición utilizados para efectuar las mediciones de tiempos, distancias, ángulos, etc., con que se caracteriza numéricamente el movimiento. Al mismo tiempo, el referencial provee de significado preciso a las definiciones de las cantidades físicas.

Por definición, dos referenciales (cuerpos rígidos) que guarden siempre la misma relación espacial el uno con el otro (es decir, que estén en reposo relativo mutuo), son equivalentes: constituyen de hecho un mismo referencial. Si los referenciales están en movimiento (según se observan mutuamente), entonces se trata por definición de dos *referenciales distintos*.

El referencial más común en ingeniería es una porción de la superficie terrestre o equivalentemente algún cuerpo fijo a ella, como un laboratorio, un edificio, etc. (Fig. 1). Cuando no se especifica el referencial explícitamente, se supone que es éste. Le llamaremos *referencial Tierra*. Otro ejemplo de referencial es un vehículo en movimiento con respecto a Tierra.

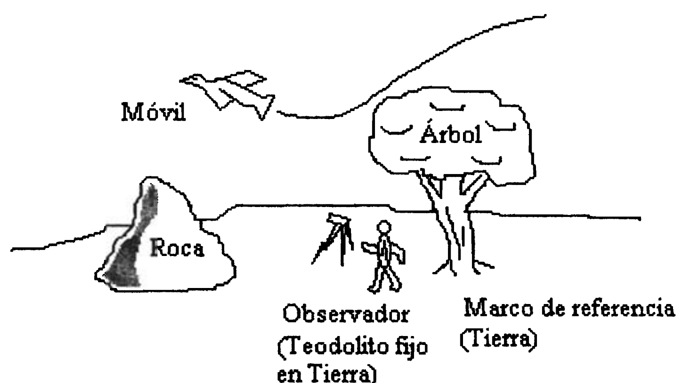


Fig. 1

(Nota. El término *observador* se suele tomar en física como sinónimo de referencial. La expresión "según el observador X" significa lo mismo que "según las mediciones efectuadas con base en el referencial X". El término se aplica también cuando las mediciones se registran automáticamente. Por ejemplo, si el referencial es un satélite artificial, entonces éste o sus instrumentos hacen las veces de "observadores" de fenómenos atmosféricos, meteorológicos, astrofísicos, etc.).

La distinción entre referenciales tiene un contenido físico fundamental. Los valores experimentales de las cantidades físicas siempre van ligadas al referencial subyacente, en el sentido de que no se puede afirmar a priori que tales medidas resulten las mismas con base en otro referencial distinto.

En particular, dado que la distinción entre referenciales se da por sus movimientos relativos mutuos, todos los conceptos asociados con el desplazamiento tendrán un carácter *relativo* evidente. Todos nos damos cuenta, por ejemplo, de que la velocidad de un Automóvil con respecto a Tierra no es la misma que con respecto a un Tren que viaje paralelamente a él. Tampoco es la velocidad del Tren la misma con respecto a Tierra que con respecto al Automóvil (advierta que se puede considerar a un cuerpo unas veces como el móvil, otras veces como el referencial).

Otro nivel más profundo de relatividad toca los conceptos de espacio y tiempo. Tiene su expresión en la Teoría de la Relatividad Especial de Einstein. Entre sus resultados tenemos que las duraciones de los fenómenos físicos dependen del marco de referencia, lo mismo que las distancias entre los objetos físicos. Las diferencias entre los valores observados en distintos referenciales se vuelven apreciables cuando la diferencia de velocidades entre los mismos se aproxima a la velocidad de la luz. Sin embargo, estos

temas quedan fuera de nuestro estudio. En el ámbito de la Mecánica Clásica o Newtoniana, dentro del cual nos situaremos, se asume que espacio y tiempo son absolutos: los relojes que portan los móviles miden el mismo tiempo independientemente de su estado de movimiento; la medición de la distancia entre dos objetos, realizada desde diversos móviles, arroja el mismo resultado.

La teoría física permite traducir valores experimentales de un referencial a otro. Podemos medir una cantidad con base en algún referencial A y luego calcular el valor que le correspondería en otro referencial B. Por ejemplo, si las velocidades del automóvil y el tren con respecto a Tierra son respectivamente de 90 km/h y 50 km/h, ambas en la misma dirección, entonces la velocidad del automóvil con respecto al tren es de 40 km/h.

Por esta razón no es necesario mantener instrumentos de medida en todos los referenciales considerados. Más aun, algunas veces conviene definir como referencial un objeto pequeño incapaz de albergar aparatos de medición, como por ejemplo un elemento de un mecanismo.

Demos otros ejemplos de referenciales:

El Sol se usa como marco de referencia para describir los movimientos de los planetas del sistema solar.

Un avión en vuelo.

Cierto conjunto de estrellas, de las más lejanas de la Tierra, sirve como marco para estudiar los movimientos de cuerpos celestes. A este se le llama el *referencial de las estrellas fijas*, y juega un papel importante en la formulación de las leyes de Newton.

Un elevador en caída libre (para experimentos sobre ingravidez).

Una cabina centrífuga (para experimentos de fisiología).

Una estación espacial en órbita terrestre.

La Vía Láctea, nuestra galaxia (para el movimiento del Sol y otras estrellas).

Un vehículo acelerado en línea recta.

La pluma de una grúa durante una maniobra, etcétera.

Una vez estipulado el marco de referencia, se establece uno o varios sistemas de coordenadas, según convenga. Todo sistema de coordenadas debe *fijarse* en el referencial. Un sistema consta generalmente de algunos puntos especiales (origen, polos), unas direcciones de referencia (ejes) o curvas características, y un procedimiento para asignar coordenadas a los puntos del espacio. Un ejemplo de sistema de coordenadas fijado en el referencial Tierra es el sistema de coordenadas geográficas, en el que la posición de un punto sobre la superficie terrestre se especifica mediante la longitud y latitud geográficas.

Los puntos especiales del sistema, y las rectas que constituyen sus ejes, se definen valiéndose de *puntos distinguibles* del referencial. Así por ejemplo, si el referencial es digamos una mesa de billar, podríamos definir en él un sistema cartesiano bidimensional cuyo origen O fuese una de las esquinas de la mesa, y cuyos ejes X y Y fuesen los filos de dos bandas perpendiculares. Para el referencial Sol tomaríamos el origen en el centro del Sol y definiríamos los ejes como rectas que parten del Sol hacia estrellas fijas determinadas.

3.3 INVARIABILIDAD DE LAS CANTIDADES FÍSICAS VECTORIALES

Consideremos el movimiento de una bola de billar. Escojamos la mesa de billar como marco de referencia, y definamos un sistema de coordenadas OXY como se muestra en la Fig. 2.

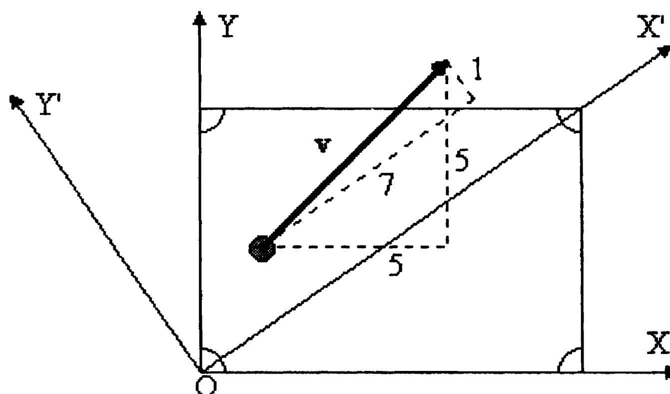


Fig. 2

Digamos que en cierto momento la velocidad de la bola tenga componentes iguales ambas a 5 unidades, cosa que escribimos así:

$\mathbf{v} = (5, 5)$ (en el sistema OXY)

En otro sistema O'X'Y' como el que se muestra, digamos que la velocidad resulte

$\mathbf{v} = (7, 1)$ (en el sistema O'X'Y')

Las componentes de la velocidad son distintas en ambos sistemas. Sin embargo, ambas parejas (5, 5) y (7, 1) describen el mismo estado de movimiento de la bola relativo al marco de referencia; vemos que ambas arrojan la misma magnitud de velocidad,

$$\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \qquad \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

y la misma dirección de movimiento hacia los objetos físicos del referencial. Este es el punto que deseábamos ilustrar. Las cantidades físicas vectoriales se pueden numerizar de múltiples maneras, pero a todas ellas atañe la misma interpretación física.

Hemos hablado anteriormente de la correspondencia entre las cantidades físicas vectoriales y las flechas. La correspondencia vector-flecha va todavía más lejos. Supongamos que en cierto momento la velocidad de un automóvil está dirigida hacia algún objeto físico de los alrededores, por ejemplo un árbol. En el papel trazamos la velocidad como una flecha la cual, digamos, resultó dirigida hacia un punto determinado en la orilla de la hoja de papel. La velocidad del automóvil se puede describir con base en algún

sistema de coordenadas, lo mismo que la flecha en el papel. Sin embargo, sea cual sea el sistema de coordenadas que se adopte, la numeración de la velocidad (la de sus componentes o su magnitud y dirección) debe reflejar el mismo movimiento hacia el árbol mencionado. En otros términos, los vectores físicos poseen un "sustrato", que son los objetos materiales a su alrededor (el "marco de referencia"). En completa analogía, la flecha que representa gráficamente la velocidad posee un sustrato: el papel en que se dibuja. En este papel podemos trazar otro sistema de coordenadas distinto del inicial, y por ello las proyecciones de la flecha sobre los ejes cambiarán. Pero la flecha debe permanecer inmóvil con respecto al papel (a éste no se le hace compartir el movimiento del sistema de coordenadas), y sigue apuntando hacia el mismo punto material en la orilla del mismo.

Esta propiedad de independencia o invariabilidad de las cantidades físicas se expresa matemáticamente mediante una "ley de transformación" frente a cambios del sistema de coordenadas. Para los vectores, en particular, esta ley describe cómo calcular, a partir de las componentes de un vector en un sistema dado XYZ, las componentes de ese vector en otro sistema X'Y'Z' trasladado y rotado con respecto a aquel.

Los sistemas cartesianos que emplearemos son *derechos*, esto es, al girar el eje X en 90° (en torno al eje Z) de modo que coincida con el eje Y, se obtiene precisamente el eje Z con la regla de la mano derecha.

Hemos dicho que el vector se define especificando un procedimiento para medir su magnitud y dirección. Alternativamente, el vector puede definirse dando el significado de sus componentes. En este método se especifica una terna de cantidades (a_x, a_y, a_z) asociada con un sistema cartesiano particular. Dada la terna se calculan fácilmente la magnitud y dirección del vector.

3.4 SIGNIFICADO COMÚN DE LAS COMPONENTES DE UN VECTOR A LO LARGO DE EJES ARBITRARIOS

A *cualquier* terna de cantidades (a_x, a_y, a_z) siempre le podemos asociar una flecha en un espacio cartesiano abstracto. Sería aquella flecha cuyas proyecciones algebraicas sobre los ejes de este espacio valiesen a_x, a_y y a_z, medidas en una escala apropiada. Sin embargo, no toda flecha construída así representa un vector.

Para que una terna represente un vector debe satisfacer una condición especial, cuyo aspecto geométrico describiremos aquí. Tomemos por caso el vector velocidad de una partícula, suponiendo por simplicidad que ésta se mueve en el plano XY (Fig. 3).

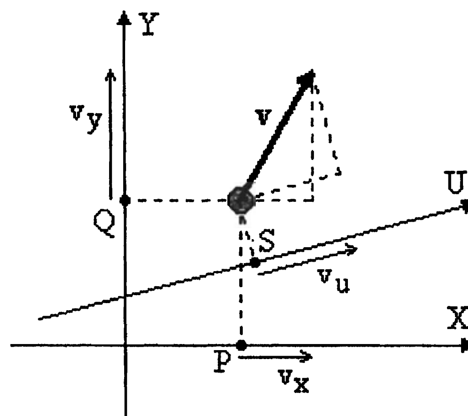


Fig. 3

Sea $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ la velocidad de la partícula en un momento dado, y sean los puntos P y Q las proyecciones de la partícula sobre los ejes X y Y, respectivamente. Construyamos la flecha **v** cuyas proyecciones sobre los ejes valgan v_x y v_y. Sabemos que conforme la partícula se mueve en el plano, sus proyecciones se mueven a lo largo de los ejes con velocidades v_x y v_y. Ahora consideremos otra dirección arbitraria o "eje U" y obtengamos *gráficamente* la componente de **v** a lo largo de U, denotada con v_u. Es fácil demostrar que la velocidad del punto S, que es la proyección de la partícula sobre el eje U, es precisamente v_u. Es decir, *toda componente del vector* **v** *tiene el mismo significado físico no importa la dirección o eje al que corresponda*. Esto es lo que identifica a **v** como vector.

Esta condición, que aquí se antoja trivial, no lo es tanto en los siguientes ejemplos.

<u>El vector gradiente</u>

Consideremos una función φ(x, y, z), continua y al menos dos veces diferenciable en alguna región del espacio tridimensional, abarcado por un sistema cartesiano XYZ.

Formemos una terna de cantidades del siguiente modo:

(2) $$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

donde suponemos que las derivadas parciales están evaluadas en cierto punto P.

Definamos en el espacio XYZ una escala apropiada a las dimensiones físicas de las derivadas de φ, y construyamos en P aquella flecha cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados, en dicha escala, sean $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, evaluadas en P (Fig. 4).

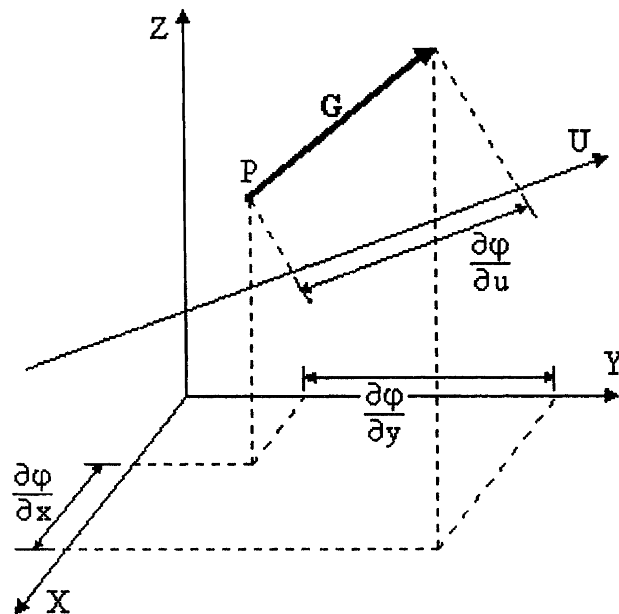


Fig. 4

¿Es esta terna una cantidad vectorial? Para responder, examinemos el significado matemático de las componentes de **G**. Tenemos que G_x es la tasa de variación espacial de la función φ en la dirección del eje X, con significados análogos de las componentes G_y y G_z. Entonces la cantidad **G** será un vector si se cumple que la proyección de la flecha **G** sobre una dirección o eje arbitrario U, medida en la escala antes mencionada, es igual a la tasa de variación espacial de φ a lo largo del eje U, o sea si $G_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$ (donde "u" es la coordenada o longitud de arco medida a lo largo del eje U). Esta relación es cierta, como demostraremos posteriormente, así que **G** es un vector (denominado el *vector gradiente*).

Al construir la flecha correspondiente a la terna

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$$

encontraremos que la proyección de esta flecha sobre una dirección U *no es igual a* $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$.

Por la razón de que la terna de las segundas derivadas *no es* un vector.

El vector área

Sea Δ un triángulo de área A y vértices P, Q, R (Fig. 5). Definamos la terna de cantidades algebraicas (A_x, A_y, A_z), asociadas con los ejes X, Y, Z de un sistema cartesiano, como sigue:

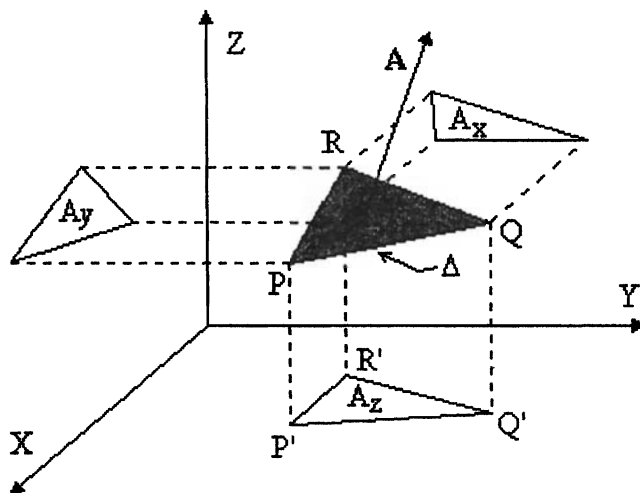


Fig. 5

- La magnitud de A_z es el área de la proyección del triángulo Δ sobre el plano XY (el área del triángulo P'Q'R' en la Fig.5).
- Para asignar un signo algebraico a A_z, observamos el orden P' → Q' → R' en el plano XY (Fig. 6). Si este orden corresponde a la rotación, en torno al eje Z, que lleva el eje X a coincidir con el eje Y a través de un ángulo de 90°, asignamos el signo positivo. El signo negativo corresponderá al sentido de rotación contrario.

De forma análoga definimos A_x y A_y.

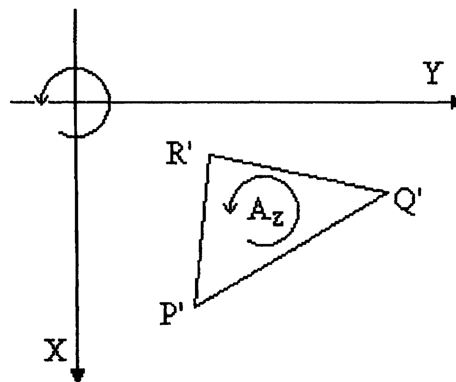


Fig. 6

Resulta que la terna así definida es un vector, denominado *vector área*. La flecha asociada, **A**, queda perpendicular al plano de Δ. Su sentido se obtiene aplicando la regla de la mano derecha a los vértices P → Q → R. El área del triángulo se puede escribir en términos de las áreas de sus proyecciones en la forma $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

Para obtener el área de la proyección del triángulo Δ sobre algún plano arbitrario S tenemos así dos métodos: uno consiste en obtener los vértices del triángulo-proyección y calcular su área; el otro consiste simplemente en obtener la componente del vector área **A** sobre un eje perpendicular al plano S (estas componentes se miden en metros cuadrados).

En el capítulo 1 escribimos el vector área de un triángulo PQR en la forma

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

(Véase la figura a la derecha).

Poniendo

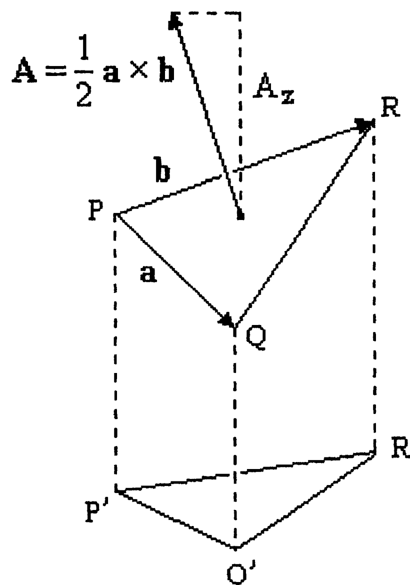
$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

se sigue que las componentes del vector área son, en cierto sistema OXYZ,

$$A_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$A_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$A_z = a_x b_y - a_y b_z$$



(Fig. 27 del capítulo 1)

Ahora bien, digamos que con respecto a otro sistema O′X′Y′Z′ trasladado y girado con respecto al sistema OXYZ, las componentes de **a** y **b** sean

$$\mathbf{a} = (a_x', a_y', a_z') \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} = (b_x', b_y', b_z')$$

Entonces las componentes del vector área **A** en dicho sistema primo serán

$$A_x' = a_y' b_z' - a_z' b_y'$$

$$A_y' = a_z' b_x' - a_x' b_z'$$

$$A_z' = a_x' b_y' - a_y' b_z'$$

¿Qué significa que **A** sea un vector? Significa que la interpretación de A_x en el sistema original OXYZ es la misma que la de A_x' en el sistema primo O′X′Y′Z′: A_x' es el área de la proyección del triángulo PQR sobre el plano Y′Z′. Lo mismo con respecto a las intepretaciones de A_y' y A_z'.

El vector flujo de calor

Consideremos un cuerpo sólido donde existe una distribución de temperaturas, descrita por cierta función de la posición y del tiempo, T(x, y, z, t). En un punto arbitrario P del sólido imaginemos tres superficies planas muy pequeñas, paralelas a los planos coordenados YZ, XZ y XY, y de áreas respectivas S_x, S_y y S_z (Fig. 7). Escojamos las normales a estas superficies en las direcciones de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

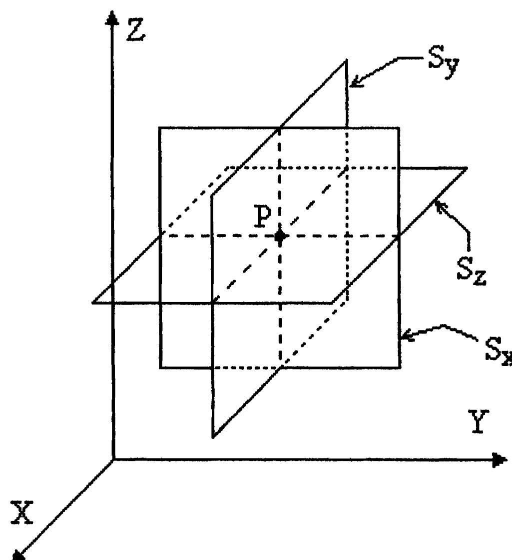


Fig. 7

Definamos en P la siguiente terna (J_x, J_y, J_z):

$J_x \equiv$ cantidad de calor que fluye a través de S_x (en la dirección del vector unitario i) por unidad de área y unidad de tiempo

con análogas definiciones para J_y y J_z. Las unidades físicas de estas cantidades son $\frac{\text{julio}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$ o bien $\frac{\text{vatio}}{\text{m}^2}$.

Demostraremos que **J** = (J_x, J_y, J_z) es un vector (denominado *flujo de calor*), valiéndonos de la primera ley de la termodinámica y de un proceso de límite.

Sea PABC un pequeño tetraedro dispuesto como se indica en la Fig. 8, con un vértice en P y caras PBC, PCA PAB y ABC, de áreas respectivas S_x, S_y, S_z y S. Los vectores unitarios normales a estas caras son respectivamente –**i**, –**j**, –**k** y **n**. En términos de los ángulos directores del unitario **n** tenemos

(3) $$\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

El área vectorial de la cara oblicua ABC es

$$\mathbf{S} = S\,\mathbf{n}$$

Claramente,

$$S_x = \mathbf{S} \bullet \mathbf{i} = S \cos \alpha$$

$$S_y = \mathbf{S} \bullet \mathbf{j} = S \cos \beta$$

$$S_z = \mathbf{S} \bullet \mathbf{k} = S \cos \gamma$$

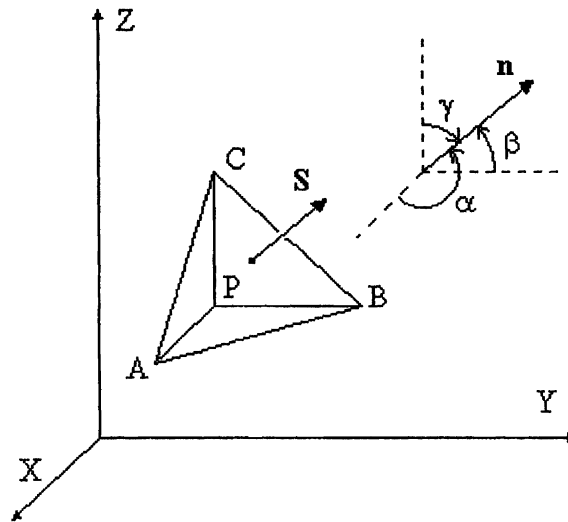


Fig. 8

Sea J_n el flujo de calor a través de la cara oblicua. La rapidez con que el tetraedro aumenta su energía interna es igual al flujo de calor neto que entra al tetraedro, o sea

$$J_x\,(S \cos \alpha) + J_y\,(S \cos \beta) + J_z\,(S \cos \gamma) - J_n\,S$$

Por otra parte, en términos de la densidad de masa, ρ, el calor específico del sólido, c, y la temperatura media en el interior del tetraedro, T_m, esta rapidez debe ser igual por conservación de energía a

$$\frac{\partial}{\partial t}\ (\text{masa} \times \text{calor específico} \times \text{temperatura}) = \left(\frac{1}{3} S h\right) \cdot \rho c \frac{\partial T_m}{\partial t}$$

donde h es la altura del tetraedro, tirada desde el vértice P. Se sigue la relación

$$J_x \cos \alpha + J_y \cos \beta + J_z \cos \gamma - J_n = \frac{1}{3} h \rho c \frac{\partial T_m}{\partial t}$$

Hagamos ahora $h \to 0$. Entonces el lado derecho de la ecuación tiende a cero y J_x, J_y, J_z y J_n se vuelven los flujos en el punto P, a través de planos paralelos a los planos coordenados y a través de un plano que contiene a P y cuya normal es **n**. Se obtiene así

$$J_n = J_x \cos \alpha + J_y \cos \beta + J_z \cos \gamma = \mathbf{J} \bullet \mathbf{n}$$

$$= \text{componente de } \mathbf{J} \text{ sobre } \mathbf{n} \qquad \text{QED.}$$

El vector de posición

La flecha que va desde el origen O del sistema XYZ hasta el punto P(x, y, z) representa lo que se suele denominar el *vector de posición* del punto P (Fig. 9). Sin embargo, la terna (x, y, z) = **r** no es propiamente un vector en el sentido considerado en esta sección. Para reconocerlo, basta examinar el significado de las componentes de **r**:

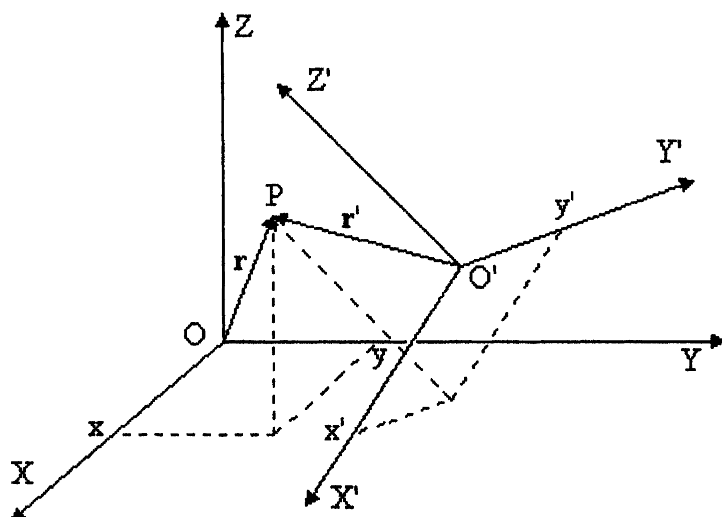


Fig. 9

Componente X de **r** = coordenada "x" del punto P

Las otras dos componentes tienen análogos significados. Para que **r** fuese un vector, sus componentes en otro sistema *trasladado y rotado*, X'Y'Z', deberían tener el mismo significado, esto es,

Componente X' de **r** = coordenada x′ del punto P etc.

Esto no ocurre en general, como puede advertirse gráficamente en la Fig. 9 simplemente del hecho de que (x, y, z) y (x′, y′, z′) corresponden a dos flechas distintas **r** y **r′**. No obstante, si los sistemas XYZ y X'Y'Z' tuviesen el mismo origen tendríamos que ambas flechas serían una misma. Por este motivo decimos que **r** es un vector sólo *bajo rotaciones* del sistema de coordenadas (*traslaciones* excluídas), según explicaremos posteriormente.

Por otra parte, el vector separación entre dos puntos cualesquiera A y B sí es un vector bajo traslaciones y rotaciones. Como vemos en la Fig. 10, podemos escribir

$$\mathbf{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \qquad \text{(en XYZ)}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{r}_B' - \mathbf{r}_A' \qquad \text{(en X'Y'Z')}$$

La flecha **AB** es la misma en ambos sistemas, de ahí que se use el mismo símbolo "**AB**" para denotarla en uno y otro.

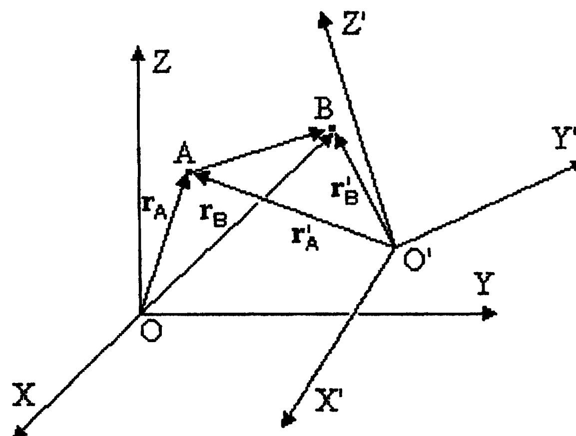


Fig. 10

Problemas

1. La velocidad angular Ω de un cuerpo rígido que rota en torno a cierto eje E se define así:

Magnitud de $\Omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$ = ritmo de variación del ángulo de giro θ alrededor del eje de rotación E.

Dirección de $\Omega \equiv$ dirección del eje de rotación, dada por la regla de la mano derecha.

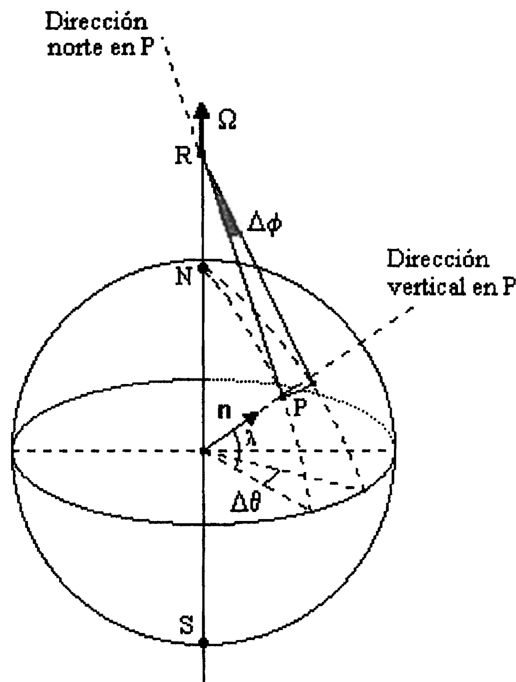


Fig. Probl. 1

Tomemos por caso la velocidad angular de la Tierra, Ω. Demuestre que esta velocidad es un vector del siguiente modo:

Considere un punto P de latitud λ sobre la superficie terrestre (ver figura). Dirija desde P una visual $P \rightarrow R$ hacia la dirección norte local. Conforme la Tierra rota un ángulo $\Delta\theta$ pequeño, esta visual rota un ángulo $\Delta\phi$ en el plano tangente a la Tierra en P, o lo que es lo mismo, alrededor de la dirección vertical **n** en P.

Demuestre que la componente de Ω a lo largo de **n** es

$$\Omega_n = \frac{d\phi}{dt}$$

2. Considere un fluido en movimiento. En un punto P en su seno sea

$J_x \equiv$ masa que fluye a través de S_x por unidad de área y unidad de tiempo (unidades $\frac{kg}{m^2 \cdot s}$)

donde S_x es un área como la que definimos en conexión con el vector flujo de calor. Suponga análogas definiciones para J_y y J_z.

Por el método del tetraedro empleado para el vector flujo de calor, demuestre que la terna (J_x, J_y, J_z) es un vector (denominado vector flujo de masa).

Sugerencia. Emplee la ley de conservación de la masa.

3. Sea un tetraedro de vertices A, B, C y D. Asociemos a las caras sendas áreas vectoriales $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ y $\mathbf{A}_4$, como se indica en la figura a la derecha.

Convencionalmente, los vectores área se dirigen hacia fuera de la región espacial interior del tetraedro.

¿Qué interpretación geométrica tiene la suma $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$?

¿Cuánto vale $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4$?

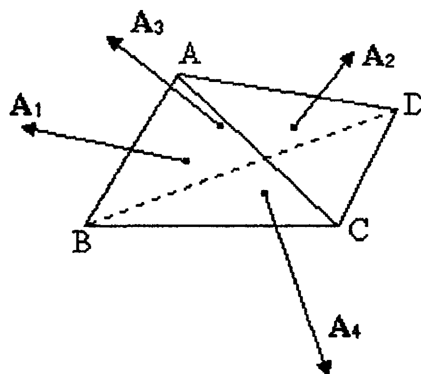


Fig. Probl. 3

3.5 LEY DE TRANSFORMACIÓN DE LAS COORDENADAS

Dadas las componentes de un vector **v** relativas a algún sistema cartesiano XYZ, ¿cómo se calculan las componentes de **v** relativas a otro sistema X′Y′Z′ que está trasladado y rotado con respecto al primero?

Geométricamente la respuesta es inmediata. Simplemente trazamos la flecha **v** y luego proyectamos esta flecha sobre los nuevos ejes X′, Y′ y Z′. Queremos formular este procedimiento analíticamente. Dado que una flecha está determinada por dos puntos, su punto inicial y su punta, primeramente veremos en esta sección cómo se transforman las coordenadas de los *puntos*, y basándonos en ello derivaremos la ley para las *flechas*.

Sean entonces XYZ y X′Y′Z′ dos sistemas cartesianos, distintos en general en cuanto a orígenes y ejes (Fig. 11). Sea P un punto general de coordenadas (x, y, z) en el sistema (original o viejo) XYZ, y (x′, y′, z′) en el sistema (primo o nuevo) X′Y′Z′.

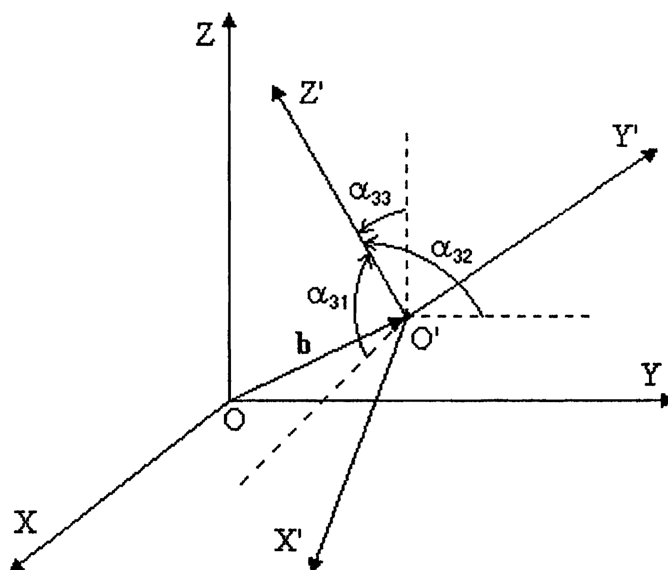


Fig. 11

El sistema primo puede ser generado sometiendo al sistema original a un *movimiento rígido*, compuesto de dos etapas: primero una traslación en la que el origen O es acarreado hasta O′, permaneciendo inalterada la orientación de los ejes X, Y, Z, y luego una rotación alrededor de un eje apropiado que pase por O′.

Los parámetros de tal movimiento rígido, mejor adecuados a nuestro objetivo, son:

Para la traslación, el vector de posición **OO′**, es decir,

OO’ ≡ **b** = (b_x, b_y, b_z) (expresado en el sistema XYZ)

Para la rotación, el conjunto de los 9 ángulos directores de los ejes X′, Y′, Z′ con respecto a los ejes X, Y, Z (la Fig. 11 muestra los correspondientes a Z′).

Usando las denominaciones alternativas

Eje X ≡ Eje X_1 Eje Y ≡ Eje X_2 Eje Z ≡ Eje X_3

Eje X' ≡ Eje X'_1 Eje Y' ≡ Eje X'_2 Eje Z' ≡ Eje X'_3

podemos reunir las definiciones de los 9 ángulos directores en una sóla:

α_{ij} ≡ ángulo que forma el eje nuevo X'_i con el eje viejo X_j
(i, j = 1, 2, 3)

Nuestra tarea consiste en expresar (x′, y′, z′) en función de (x, y, z) y de los parámetros **b** y α_{ij}. Desviémonos un momento de ella, a fin de examinar algunas propiedades importantes de los parámetros rotacionales.

Los ángulos directores del eje nuevo X'_i con respecto a los ejes viejos X_1, X_2 y X_3 son α_{i1}, α_{i2} y α_{i3}. Sus cosenos (denominados los *cosenos directores*) son precisamente las componentes del vector unitario básico **i′** a lo largo del eje nuevo X'_i. Abreviando

(4) $\cos \alpha_{ij} \equiv a_{ij}$

tenemos entonces

$$\mathbf{i}' = a_{11}\,\mathbf{i} + a_{12}\,\mathbf{j} + a_{13}\,\mathbf{k}$$

(5) $$\mathbf{j}' = a_{21}\,\mathbf{i} + a_{22}\,\mathbf{j} + a_{23}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{k}' = a_{31}\,\mathbf{i} + a_{32}\,\mathbf{j} + a_{33}\,\mathbf{k}$$

Recíprocamente, los cosenos directores del eje viejo X_i con respecto a lo ejes nuevos X'_1, X'_2 y X'_3 son a_{1i}, a_{2i} y a_{3i}, lo que conduce a

$$\mathbf{i} = a_{11}\,\mathbf{i}' + a_{21}\,\mathbf{j}' + a_{31}\,\mathbf{k}'$$

(6) $$\mathbf{j} = a_{12}\,\mathbf{i}' + a_{22}\,\mathbf{j}' + a_{32}\,\mathbf{k}'$$

$$\mathbf{k} = a_{13}\,\mathbf{i}' + a_{23}\,\mathbf{j}' + a_{33}\,\mathbf{k}'$$

La matriz de los coeficientes en (5) se denomina la *matriz de transformación*. La expresaremos en la forma

(7) $$\mathsf{A} \equiv \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Su transpuesta, $\tilde{\mathsf{A}}$, aparece en (6). Solamente tres de los elementos de A son independientes, en vista de las 6 condiciones

(8) $$\begin{aligned} &\mathbf{i}' \bullet \mathbf{i}' = \mathbf{j}' \bullet \mathbf{j}' = \mathbf{k}' \bullet \mathbf{k}' = 1 \\ &\mathbf{i}' \bullet \mathbf{j}' = \mathbf{j}' \bullet \mathbf{k}' = \mathbf{k}' \bullet \mathbf{i}' = 0 \end{aligned}$$

Desarrollando estos 6 productos con ayuda de las relaciones (5) se obtiene

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1 \qquad & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1 & a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} &= 0 \end{aligned}$$

o bien, en forma compacta,

(9) $$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

donde δ_{ij} es la Delta de Kronecker, definida por

(10) $$\delta_{ij} \equiv 1 \text{ si } i = j \qquad \text{y} \qquad \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

En notación matricial, (9) equivale a la relación

(11) $$\mathsf{A}\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{I}$$

donde $\mathsf{I} = (\delta_{ij})$ es la matriz unidad.

También los vectores unitarios **i**, **j** y **k** obedecen unas relaciones análogas a (8), por lo que, usando las representaciones (6) llegamos a las relaciones recíprocas

(12) $$\sum_{k=1}^{3} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

(13) $$\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{A} = \mathsf{I}$$

Se deduce de (11) y (13) que la matriz inversa de A es su propia transpuesta,

(14) $$\mathsf{A}^{-1} = \widetilde{\mathsf{A}}$$

es decir, A es una matriz *ortogonal*.

El determinante de A cumple $[\det(\mathsf{A})]^2 = 1$. De las dos posibilidades, $\det(\mathsf{A}) = 1$ y $\det(\mathsf{A}) = -1$, excluiremos la segunda, que no corresponde a movimientos *rígidos* del sistema de coordenadas.

Dada la matriz A, podemos hallar tanto el eje como el ángulo de la rotación que alinea XYZ con X′Y′Z′. En el Capítulo 6 mostraremos cómo hacerlo.

Hasta aquí las propiedades de la matriz de transformación. Volvamos al problema de expresar (x′, y′, z′) en términos de (x, y, z), **b** y A.

De la Fig. 12 se saca la relación

(15) $$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{b}$$

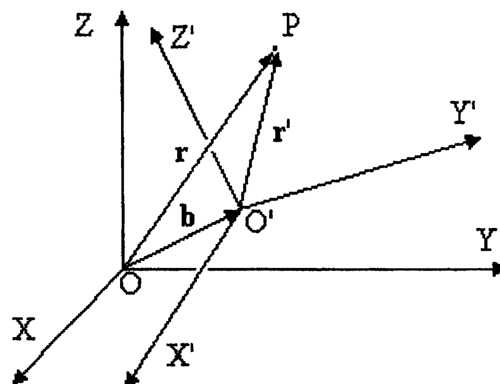


Fig. 12

Sustituyamos en ella las expresiones

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}' = x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{i}' + z'\,\mathbf{k}'$$

$$\mathbf{b} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}$$

y eliminemos los vectores **i**′, **j**′ y **k**′ mediante las ecuaciones (5). Obtenemos

(16) $$\begin{aligned} x &= a_{11}\,x' + a_{21}\,y' + a_{31}\,z' + b_x \\ y &= a_{12}\,x' + a_{22}\,y' + a_{32}\,z' + b_y \\ z &= a_{13}\,x' + a_{23}\,y' + a_{33}\,z' + b_z \end{aligned}$$

Con objeto de invertir estas relaciones, definamos las matrices columna

(17) $$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathsf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Entonces (16) es equivalente a

(18) $$\mathsf{x} = \widetilde{\mathsf{A}}\,\mathsf{x}' + \mathsf{b}$$

Multiplicando a la izquierda por $\mathbf{A}$ y usando (14),

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{A}\,\mathbf{b}$$

Poniendo $\mathbf{x} = 0$ en esta relación se deduce que el término $-\mathbf{Ab}$ es el vector de posición del origen O relativo al sistema X'Y'Z'. Definiendo

$$\text{(19)} \qquad \mathbf{b}' \equiv -\mathbf{A}\,\mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} b'_x \\ b'_y \\ b'_z \end{pmatrix}$$

arribamos finalmente a

$$\text{(20)} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_x \\ b'_y \\ b'_z \end{pmatrix}$$

que compactamos en la forma

$$\text{(21)} \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}'$$

Las ecuaciones (16), (18), (20) y (21) son otras tantas formas alternativas de expresar la ley de transformación de las coordenadas. Su estructura sugiere el siguiente convenio:

> Designaremos las coordenadas de puntos o las componentes de vectores mediante subíndices numéricos 1, 2, 3, correspondientes a los ejes X, Y y Z, respectivamente. En especial pondremos $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$ y $z \equiv x_3$.
> Ejemplos: $P(x, y, z) \equiv P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(a', b', c') \equiv Q(q'_1, q'_2, q'_3)$
> $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) \equiv (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$
> $v' = (v'_x, v'_y, v'_z) = (v'_1, v'_2, v'_3)$ etc.

Diremos que el punto P posee coordenadas x_i, que el punto Q posee coordenadas q_i, que el vector Ω posee componentes Ω_i, etc., sobreentendiendo que el subíndice "i" (o cualquier otro subíndice) toma los valores 1, 2, 3. Incluso hablaremos del "punto x_i", del "vector Ω_i", etc.

Para expresar un mismo vector en dos sistemas XYZ y X'Y'Z' se usa la notación

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \qquad \mathbf{v} = (v'_x, v'_y, v'_z)$$

Esta es la llamada "notación simbólica", en la que se usa el mismo símbolo "**v**" para denotar el vector en cualquier sistemas de coordenadas; con ello se quiere manifestar la independencia de la cantidad vectorial con respecto al sistema de coordenadas.

Ahora bien, al igual que en las relaciones (17), a todo vector **v** se le puede asociar una matriz columna. Debe hacerse una distinción, sin embargo, de las matrices columna asociadas a un mismo vector en sistemas de coordenadas distintos:

$$\mathsf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \qquad \mathsf{v}' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de transformación pueden escribirse así:

(22) $$x_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ki} x'_k + b_i \qquad (\mathsf{x} = \tilde{\mathsf{A}}\,\mathsf{x}' + \mathsf{b})$$

o bien en la forma recíproca

(23) $$x'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k + b'_i \qquad (\mathsf{x}' = \mathsf{A}\,\mathsf{x} + \mathsf{b}')$$

donde

(24) $$b'_i = -\sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_k \qquad (\mathsf{b}' = -\,\mathsf{A}\,\mathsf{b})$$

3.6 Ley de transformación de las componentes de vectores

Ante movimientos rígidos del sistema de coordenadas, las componentes de un vector se transforman de la misma manera que las proyecciones de una flecha. Entonces, para obtener la ley de transformación de los vectores, analizaremos la flecha **PQ** que representa el vector separación entre dos puntos P y Q.

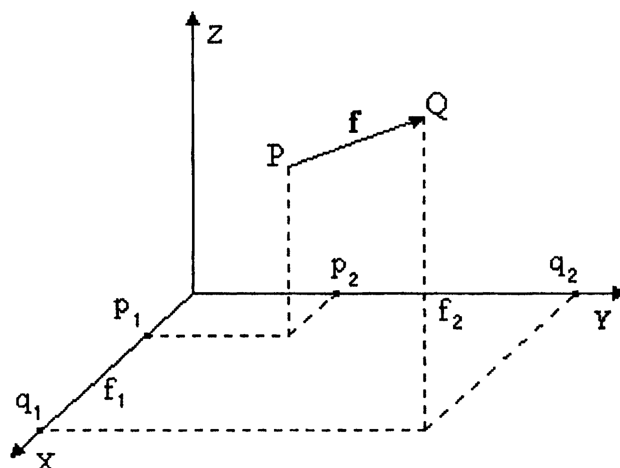


Fig. 13

Sean p_i y q_i las coordenadas de P y Q en el sistema XYZ. Entonces las componentes de la flecha $\mathbf{f} \equiv \mathbf{PQ}$ son

(25) $$f_i = q_i - p_i$$

Aplicando a las coordenadas p_i y q_i la ley de transformación respectiva en la forma (21) obtenemos

$$p' = A\,p + b' \qquad\qquad q' = A\,q + b'$$

De aquí,

$$f' = q' - p' = A\,q + b' - (A\,p + b') = A(q - p)$$

(26) $$f' = A\,f$$

Es decir, la matriz A, al operar sobre las proyecciones de la flecha f sobre los ejes del sistema XYZ, produce sus proyecciones sobre los ejes del sistema X'Y'Z'. Lo mismo ocurre tratándose de las componentes de cualquier vector.

Con base en la expresión (26) daremos ahora la definición de los vectores "físicos".

Los vectores físicos son ternas ordenadas de componentes (v_x, v_y, v_z) que satisfacen los axiomas de todo espacio vectorial real y que, si las componentes se definen u obtienen con base en un sistema de coordenadas cartesianas, se transforman según la ley

(27) $$\mathsf{v}' = \mathsf{A}\,\mathsf{v} \qquad (\mathsf{v} = \widetilde{\mathsf{A}}\,\mathsf{v}')$$

o sea

(28) $$v_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} v_k \qquad \left(v_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ki} v_k' \right)$$

ante un movimiento rígido del sistema de coordenadas, esto es, ante una traslación descrita por el vector **b** ≡ **OO′** y una rotación descrita por la matriz de transformación $\mathsf{A} = (a_{ij})$.

Nota. La ecuación (22) (o la (23)) expresa la ley de transformación de las coordenadas de puntos. También se puede ver como la ley de transformación de las componentes del vector de posición **r** = (x, y, z). Comparando (22) con (28) reconocemos que las componentes x_i no se transforman como corresponde a vectores porque sobra el término b'_i, es decir, el "vector de posición" no constituye propiamente un vector. Sin embargo, si el movimiento del sistema de coordenadas es solamente de rotación en torno a un eje a través del origen, tendremos que $b'_i = 0$ y que

(29) $$x_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k \qquad \text{o bien} \qquad \mathsf{x}' = \mathsf{A}\,\mathsf{x}$$

lo cual nos permite decir que la terna x_i (o sea (x, y, z)) es un *vector sólo bajo rotaciones*. Es importante advertir esta restricción a la hora de formar expresiones vectoriales que impliquen al vector de posición. En particular, el producto escalar de dos vectores de posición no es un invariante ante movimientos rígidos generales del sistema de coordenadas (Véase el problema 7 al final de este capítulo, y la discusión sobre invariantes en el Capítulo 4).

Problemas

1. Describa cómo están los ejes X′, Y′ y Z′ con respecto a los ejes X, Y, Z cuando la matriz de transformación es

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Las coordenadas de un punto P relativas a XYZ son $(-3,\ 2\sqrt{6}\ ,\sqrt{2}\ )$ Calcular sus coordenadas relativas a X′Y′Z′ suponiendo los siguientes parámetros de transformación:

$$\mathbf{b} = (3, -1, 2) \quad \text{(en XYZ)} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

3. Se giran los ejes X y Y en un ángulo θ alrededor del eje Z, obteniéndose los ejes X′, Y′ y Z′. Seguidamente se giran los ejes Y′ y Z′ un ángulo ϕ alrededor del eje X′, dando como resultado los ejes X″, Y″, Z″. Obtener la matriz que transforma directamente de los ejes X, Y, Z a los ejs X″, Y″, Z″.

4. Determinar a, b y c de tal manera que la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

sea una posible matriz de transformación.

5. Un vector posee componentes (0, –1, 2) en X’Y’Z’. La matriz de rotación que lleva XYZ a X′Y′Z′ es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Calcular las componentes en XYZ.

6. Enuncie la ley de transformación de las componentes de un vector frente a

(a) Una traslación pura ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathsf{A} = \mathsf{I} = (\delta_{ij})$).

(b) Una reflexión, en la que los ejes X y Y no cambian, y el eje Z invierte su dirección.

(c) Una inversión, en la que los tres ejes invierten su dirección.

7. Sean **p** y **q** los vectores de posición de dos puntos P y Q. En notación matricial, su producto escalar se escribe

$$\tilde{\mathsf{p}}\mathsf{q} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = \mathbf{p} \bullet \mathbf{q}$$

Sean **p′** y **q′** los vectores de posición de P y Q relativos a X′Y′Z′. Demostrar que

$$\mathbf{p}' \bullet \mathbf{q}' \neq \mathbf{p} \bullet \mathbf{q}$$

a menos que ambos sistemas de coordenadas posean el mismo origen.

CAPÍTULO 4	TENSORES

4.1 INTRODUCCIÓN

Los vectores, formados por 3 componentes, son un caso especial de un género de cantidades denominadas "tensores". El tensor es un objeto matemático cuya completa caracterización numérica puede requerir más de tres *componentes*. En términos generales, el tensor de orden "n" es un conjunto de 3^n componentes que obedecen una regla de transformación específica ante un movimiento rígido del sistema de coordenadas. Enunciaremos la regla de transformación general en el apartado 4.4. Hablaremos ahora de unos tensores que ya conocemos con otros nombres.

Un *tensor de orden cero* tiene solamente una componente ($n = 0$, $3^0 = 1$), la cual se transforma en sí misma frente a una traslación y rotación del sistema de coordenadas:

(1) $$T' = T$$

Un ejemplo simple es el producto escalar de dos vectores separación o desplazamiento. Dado que las longitudes y los ángulos son cantidades geométricas que no se alteran frente a movimientos rígidos del sistema de coordenadas, el producto

$$T = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos\theta$$

se transforma en

$$T' = A'_x B'_x + A'_y B'_y + A'_z B'_z = A'B' \cos\theta' = AB \cos\theta = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = T$$

Tales cantidades, cuyo valor es el mismo no importa el sistema de coordenadas que se escoja para expresarlas, reciben también el nombre de *invariantes* o *escalares*. A esta especie pertenecen cantidades físicas especificadas por un sólo valor numérico, como la masa, la temperatura, la energía, etc.

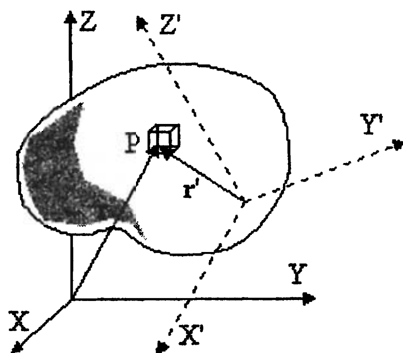


Fig. 1

Muchos escalares son funciones de la posición, en cuyo caso son *funciones (o campos) escalares*. La distribución de temperaturas en un sólido es un ejemplo típico. Se define la temperatura en un punto P como la propia de un pequeño elemento de volumen localizado allí (Fig. 1). Sea T(x, y, z) la temperatura en el punto general P(x, y, z), referida a un sistema cartesiano XYZ. Si se adopta otro sistema cartesiano X'Y'Z', la temperatura se describirá mediante otra

función distinta T′. Ésta se obtiene sustituyendo x, y, z en la función T por sus expresiones en términos de x′, y′ y z′, dadas por la ley de transformación de coordenadas (Ec. 3-22):

(2) $$T(x, y, z) = T(x(x', y', z'), y(x', y', z'), z(x', y', z')) = T'(x', y', z')$$

La relación (2) significa que la temperatura en el punto P no va a cambiar por el simple hecho de cambiar el sistema de coordenadas.

Los *tensores de primer orden* poseen 3 componentes ($n = 1$, $3^1 = 3$) y constituyen lo que conocemos ya con el nombre de vectores.

Para los vectores hemos usado dos notaciones:

Notación *simbólica*: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \equiv (v_1, v_2, v_3)$

Notación *matricial*:

$$\mathsf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Agregaremos otra, denominada "notación tensorial", en la que el vector se denota con ayuda de un subíndice que representa cualquiera de sus tres componentes:

Notación *tensorial*
o de índices: v_i $(i = 1, 2, 3)$

Las tres notaciones anteriores son muy útiles.

La ley de transformación de los vectores es la ecuación (3-28):

$$v'_i = \sum_{m=1}^{3} A_{im} v_m \qquad \text{o bien} \qquad \mathsf{v}' = \mathsf{A}\,\mathsf{v}$$

Una función vectorial de la posición, o *campo vectorial*, se transforma según

$$v'_i(x', y', z') = \sum_{m=1}^{3} a_{im} v_m(x, y, z)$$

donde ambas funciones v'_i y v_m se evalúan en un mismo punto espacial.

En orden de complejidad le siguen a los vectores los *tensores de segundo orden*. Un tensor de segundo orden se compone de $3^2 = 9$ componentes, las cuales se resumen en un símbolo con dos índices, como

$$T_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

La notación matricial se presta ventajosamente para los cálculos en los que figuran

esta clase de tensores junto con escalares y vectores. Conviene disponer los 9 elementos de un tensor de segundo orden en una matriz 3 × 3,

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

El manejo matemático de los tensores de 2º orden es muy similar al de las matrices 3 × 3. El álgebra de matrices será de gran ayuda en relación con esta clase de tensores.

En la física es frecuente encontrar situaciones de correspondencia *lineal* y *homogénea* entre dos vectores. Digamos que a un vector **a** le corresponda otro vector **b**. El ente matemático que efectúa tal correspondencia es un tensor de segundo orden (Fig. 2).

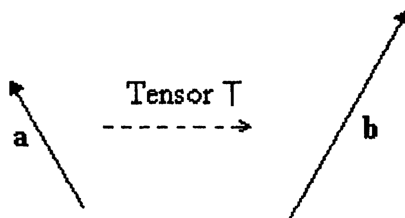


Fig. 2

El tensor T (ó T_{ij}) es un máquina cuya materia prima es un vector **a**, y cuyo producto es otro vector **b**. En general el vector producido **b** posee magnitud, dirección y dimensiones físicas distintas de las del vector operado **a**. La correspondencia tiene la siguiente forma matemática:

(3) $$\mathbf{b} = \mathsf{T}\,\mathbf{a} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

o bien

(4) $$b_i = \sum_{m=1}^{3} T_{im} a_m$$

También podemos imaginar el tensor de 2º orden como un *operador* que, aplicado sobre un vector, produce otro vector. En la ecuaciones (3) y (4) se advierte que la acción del operador se realiza a través de un producto matricial.

Los tensores de orden tres o mayor no son tan comunes en los cursos introductorios de física como los de segundo orden.

Antes de considerar tensores más complejos, veremos a continuación un ejemplo muy simple de tensor geométrico de segundo orden, con objeto de ilustrar las relaciones (3) y (4). En este ejemplo podremos advertir otras características importantes de esta clase de tensores.

4.2 Tensor de proyección sobre un plano

Sea Π un plano cuyo vector normal unitario es **n** (Fig. 3). A cada vector **u** hagámosle corresponder el vector **v** que es la proyección del propio **u** sobre el plano Π. A continuación hallaremos el tensor que efectúa tal correspondencia.

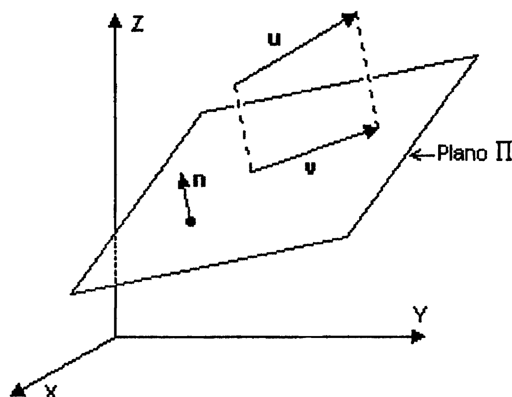


Fig. 3

El vector **u** puede ponerse como la suma de dos componentes vectoriales: una en el plano Π (igual a **v**) y la otra perpendicular a este plano, o sea en la dirección de **n** (Fig. 4),

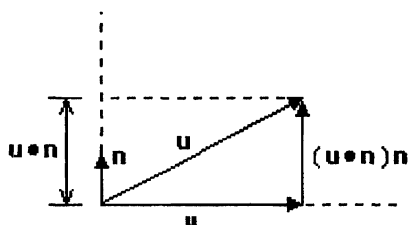


Fig. 4

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{n}$$

Despejando **v**,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \bullet \mathbf{n})\,\mathbf{n}$$

Saquemos componentes en ambos lados de esta relación, suponiendo una base cartesiana,

$$v_x = (1 - n_x^2)\,u_x - n_x n_y\,u_y - n_x n_z\,u_z$$

$$v_y = -n_y n_x\,u_x + (1 - n_y^2)\,u_y - n_y n_z\,u_z$$

$$v_z = -n_z n_x\,u_x - n_z n_y\,u_y + (1 - n_z^2)\,u_z$$

Ahora escribiremos estas relaciones en el lenguaje de matrices, para lo cual cambiamos x, y, z por x_1, x_2, x_3 y ponemos $1 - n_x^2 = n_y^2 + n_z^2 = n_2^2 + n_3^2$, etc. Obtenemos

(5) $$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & n_1^2 + n_3^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & n_1^2 + n_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

o bien, en forma compacta,

(6) $$\mathsf{v} = \mathsf{P}\,\mathsf{u} \qquad \text{o también} \qquad v_i = \sum_{m=1}^{3} P_{im} u_m$$

En (5) o (6) se ha logrado una *separación* entre los tres elementos implicados en la operación: el vector a proyectar **u**, el vector proyección **v**, y la "acción de proyectar", representada por la matriz 3 × 3 mostrada. Los elementos de esta matriz constituyen las componentes de un tensor de segundo orden P_{ij} denominado el *tensor de proyección* sobre el plano Π,

(7) $$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & n_1^2 + n_3^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & n_1^2 + n_2^2 \end{pmatrix}$$

El tensor P_{ij} (o la matriz P) encierra todas las propiedades de la operación de proyección sobre el plano Π. Mencionemos las principales:

- El tensor P mapea los vectores del espacio tridimensional a vectores contenidos en el plano Π. Este mapeo no es uno-a-uno, pues muchos vectores "**u**" distintos pueden proyectarse al mismo vector "**v**". Esto se refleja en el hecho de que el determinante de la matriz P es igual a cero,

(8) $$\det(\mathsf{P}) = 0$$

- Un vector **m** paralelo al unitario **n** se proyecta a un punto sobre el plano Π, es decir,

(9) $$\mathsf{P}\,\mathsf{m} = 0 \qquad \text{si } \mathbf{m} = \lambda\,\mathbf{n}$$

- Por otra parte, un vector **m** perpendicular a **n** se proyecta en sí mismo,

(10) $$\mathsf{P}\,\mathsf{m} = \mathsf{m} \qquad \text{si } \mathbf{m} \bullet \mathbf{n} = 0$$

Aunque todas las relaciones anteriores pueden demostrarse empleando el formalismo de matrices, existe un formalismo más general aplicable a tensores de cualquier orden, el "álgebra tensorial".

4.3 NOTACIÓN Y NOMENCLATURA DE LOS TENSORES

Antes de dar la definición formal de tensor conviene introducir unas reglas para manejarlos simbólicamente.

El tensor de orden "n" es un conjunto de 3^n números reales o "componentes", las cuales se resumen en un símbolo con "n" subíndices, en la forma $T_{ijk\ldots r}$. Cada subíndice puede tomar los valores 1, 2 y 3, los cuales asociamos con los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas. El valor 1 se asocia con el eje X, el 2 con el eje Y y el 3 con el eje Z, así que una componente como, digamos, T_{2132}, podría escribirse también T_{yxzy}.

Para los tensores de orden cero, uno y dos, que son los de mayor aplicación en los cursos de física a nivel de licenciatura, existen notaciones optativas, que se reunen en la tabla siguiente.

Clase de tensor	**Símbolo general (Notación tensorial)**	**Número de Componentes**	**Notación Simbólica**	**Notación Matricial**
De orden cero o escalar	T	$3^0 = 1$	-	-
De primer orden o vector	T_i	$3^1 = 3$	**T**	Matriz 3 × 1 T
De segundo orden	T_{ij}	$3^2 = 9$	-	Matriz 3 × 3 T
De tercer orden	T_{ijk}	$3^3 = 27$	-	-
...	...	...	...	...
De orden "n"	$T_{ijk\ldots r}$ (n índices)	3^n	-	-

Convención de suma de Einstein

Un índice que ocurra dos veces dentro de un símbolo o término se denomina *índice mudo*, e indica implícitamente una suma sobre él desde 1 hasta 3.

Ejemplos:

$$A_{iik} = A_{11k} + A_{22k} + A_{33k}$$

$$B_{rs}x_s = B_{r1}x_1 + B_{r2}x_2 + B_{r3}x_3$$

$$\begin{aligned} C_{pm}d_{pm} &= C_{1m}d_{1m} + C_{2m}d_{2m} + C_{3m}d_{3m} = \\ &= C_{11}d_{11} + C_{12}d_{12} + C_{13}d_{13} + \\ &\quad + C_{21}d_{21} + C_{22}d_{22} + C_{23}d_{23} + \\ &\quad + C_{31}d_{31} + C_{32}d_{32} + C_{33}d_{33} \end{aligned}$$

No es válido que un mismo índice mudo aparezca más de dos veces en el mismo término:

¡NO! $A_{ik}C_{km}L_k$ ¡NO! $D_{ii}F_jM_{ik}$

Tales expresiones inválidas señalan un error.

Todo índice mudo puede cambiarse por otro índice mudo que no aparezca ya en el mismo símbolo o término. Ejemplos:

$$A_{iij} = A_{kkj} = A_{mmj}$$

$$A_{lmn}B_{mp}C_{pq} = A_{lin}B_{ij}C_{jq} = A_{lsn}B_{st}C_{tq} = \ldots$$

$$T_{ik}x_ix_k + M_iA_i - 2B_{jj} = T_{lm}x_lx_m + M_rA_r - 2B_{nn}$$

¡NO! $B_{mpq}D_{pq} = B_{mpp}D_{pp}$

Los índices no repetidos dentro de un símbolo o término se llaman *índices libres.* Un término con n índices libres representa uno de 3^n números reales. En expresiones o ecuaciones, todos los términos deben contener los mismos índices libres. Ejemplos:

$A_{lmk}B_l + \lambda\, C_{iikm} - 5\, T_mU_k$ (libres: m, k, mudos: l, i)

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$ (libres: i, j, mudos: ninguno)

$$I_{ij} = \int \rho(x_ix_j - r^2\delta_{ij})dV$$ (ídem)

Se permite cambiar algunos o todos los índices de una ecuación, siempre que el cambio se aplique a todos los términos. Ejemplo:

$T'_{ij} = a_{ik}a_{jm}T_{km}$ es lo mismo que $T'_{rs} = a_{rp}a_{si}T_{pi}$

$Q_h - \Omega_{pqh}B_{pq} + \lambda\, A_iB_iC_h$ equivale a $Q_i - \Omega_{lmi}B_{lm} + \lambda\, A_hB_hC_i$

El símbolo ¡No Σ(i, j, …)! suspenderá momentáneamente la convención de suma en lo que respecta a los índices mudos i, j, … Así, en el término

$A_i^{(p)}B_j^{(p)}$ ¡No Σ(p)!

no debe sumarse sobre el índice “p”.

Relación entre las notaciones matricial y tensorial.

La notación de índices se utiliza ampliamente en el álgebra de matrices.

- Que a_{ij} sean los elementos de la matriz A se denota con

$$\mathsf{A} = (a_{ij}) \qquad \text{o bien} \qquad (\mathsf{A})_{ij} = a_{ij}$$

- La matriz transpuesta de $\mathsf{A} = (a_{ij})$ es

$$(\tilde{\mathsf{A}})_{ij} \equiv \tilde{a}_{ij} = a_{ji}$$

- Para $\mathsf{A} = (a_{ij})$, $\mathsf{B} = (b_{ij})$, $\mathsf{C} = (c_{ij})$, etc. tenemos los productos

$$(\mathsf{AB})_{ij} = a_{im}b_{mj} \qquad (\mathsf{ABC})_{ij} = a_{im}b_{mn}c_{nj}$$

$$(\mathrm{DE\tilde{D}})_{pq} = d_{pm}e_{mn}\tilde{d}_{nq} = d_{pm}e_{mn}d_{qn}$$

Note cómo se encadenan los índices mudos.

- Para la matriz columna $\mathsf{v} = (v_i)$ tenemos

$$(\mathsf{A\,v})_i = a_{ik}v_k \qquad (\tilde{\mathsf{v}}\,\mathsf{A})_i = v_k a_{ki}$$

La delta de Kronecker

Ya hemos definido anteriormente la delta de Kronecker en la forma

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \mathsf{I} = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las δ_{ij}'s son los elementos de la matriz unidad I. Note que $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$.

La delta de Kronecker posee esta propiedad muy útil:

$$\delta_{ik}A_{kmnp\ldots} = A_{imnp\ldots}$$

O sea que la delta "aplicada" sobre un símbolo (esto es, enlazada con él a través de un índice mudo, como el índice "k" que es común a la δ_{ik} y al símbolo A_{kmnp}) produce en dicho símbolo el cambio de tal índice mudo por el índice libre de la delta, la cual desaparece. Otros ejemplos:

$$\delta_{ij}x_jx_k = x_ix_k \qquad \delta_{ij}\delta_{km}A_{jm} = A_{ik} \qquad \delta_{rs}\delta_{rt} = \delta_{st}$$

En el siguiente ejemplo la delta se puede aplicar ya sea sobre T_p o sobre U_q.

$$\delta_{pq} T_p U_q = \begin{cases} (\delta_{pq} T_p) U_q = T_q U_q \\ \\ T_p (\delta_{pq} U_q) = T_p U_p \end{cases}$$

El resultado es el mismo puesto que $T_p U_p = T_q U_q$.

Consideremos la derivada $\frac{\partial x_i}{\partial x_k}$, en la que x_i representa a cualquiera de las variables de posición x, y, z (o bien x_1, x_2, x_3). En virtud de la independencia mutua de estas variables tenemos que

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

relaciones que podemos expresar sucintamente en la forma

(11) $$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$$

Usemos la relación (11) para evaluar las derivadas con respecto a x, y, z de la forma bilineal $F = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{13}xz + b_{21}yx + b_{22}y^2 + b_{23}yz + b_{31}zx + b_{32}zy + b_{33}z^2$, la cual podemos compactar en la forma $F = b_{ij}\, x_i x_j$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(b_{ij} x_i x_j) = b_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + b_{ij} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k}$$

$$= b_{ij}\, \delta_{ik}\, x_j + b_{ij}\, x_i\, \delta_{jk}$$

Pero $b_{ij}\, \delta_{ik} = b_{kj}$ y $b_{ij}\, \delta_{jk} = b_{ik}$, de tal modo que

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = b_{kj} x_j + b_{ik} x_i$$

(Advierta que conviene derivar con respecto a "x_k", no con respecto a "x_i" o "x_j", puesto que un término como $\frac{\partial}{\partial x_i}(b_{ij} x_i x_j)$ no es válido porque contiene tres veces el índice "i").

Relación entre la notación simbólica vectorial y la notación tensorial

Un vector se denota en la notación simbólica con una literal puesta en negrita, por ejemplo "**T**". En la notación tensorial, este vector se denota con ayuda de un subíndice en la forma "T_i", que resume sus tres componentes (T_1, T_2, T_3) ó (T_x, T_y, T_z). En este texto se ofrecerá a menudo pasar de una notación a otra, para lo cual introduciremos el siguiente convenio notacional:

(12) $(\mathbf{T})_i = T_i$

Podemos leerlo así: la componente "i" del vector **T** es T_i.

En cuanto al producto escalar de dos vectores, existe una correspondencia directa entre ambas notaciones, de la forma

(13) $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_k\, b_k$

(puesto que $a_k\, b_k = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$.)

El vector de posición "**r**" es una excepción a la regla (12). No se escribe en la forma $(\mathbf{r})_i = r_i$ sino, como lo hemos venido haciendo,

(14) $(\mathbf{r})_i = x_i$

A continuación algunos ejemplos de la conversión de una notación a otra. Se acostumbra usar como índice libre de vectores cualquiera de los índices i, j, k, y como índices mudos m, n, p, q, r, … etc.

El vector $(\Omega \bullet \mathbf{M})\mathbf{F}$ se escribe en notación tensorial así:

$$[(\Omega \bullet \mathbf{M})\, \mathbf{F}]_i = \Omega_m\, M_m\, F_i$$

También podríamos escribirlo usando un índice mudo distinto, como en $\Omega_r M_r\, F_i$.

La componente "k" del vector $(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})(\mathbf{c} \bullet \mathbf{d})\mathbf{e}$ es

$$[(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})(\mathbf{c} \bullet \mathbf{d})\mathbf{e}]_k = a_p b_p c_q d_q e_k$$

Examine este caso donde aparece un vector separación **PQ**:

$$[(\mathbf{u} \bullet \mathbf{PQ})\mathbf{C} - \mu\, \mathbf{D}]_j = u_m\, (\mathbf{PQ})_m\, C_j - \mu\, D_j$$

Finalmente, advierta la siguiente conversión válida:

$$(\mathbf{n} - \mathbf{p}) \bullet \mathbf{A} = (n_s - p_s)\, A_s$$

4.4 TENSORES DE ORDEN n

En la sección 4.2 presentamos la matriz P que, aplicada sobre cualquier vector u, genera su proyección vectorial v sobre un plano Π dado:

(15) $$\mathsf{v} = \mathsf{P}\,\mathsf{u} \qquad \text{o bien} \qquad v_i = P_{ij}\,u_j$$

Mencionamos que las cantidades $(\mathsf{P})_{ij} \equiv P_{ij}$ constituían las componentes de un tensor de segundo orden, el tensor de proyección. Ello obviamente no significa que toda matriz 3 × 3 encierre las componentes de un tensor de segundo orden. El carácter tensorial del conjunto de las P_{ij}'s no tiene nada que ver con la manera como se arreglan, bien en una matriz bien en un sólo renglón $\{P_{ij}\} \equiv \{P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{31}, P_{32}, P_{33}\}$, etc., sino que reside en una característica fundamental: la relación entre los vectores **u**, **v** y el plano Π es puramente *geométrica*, es decir, no depende del sistema de coordenadas empleado para describirla. La matriz P depende solamente de la orientación fija del plano Π con respecto al "marco de referencia", es decir, de la dirección **n**.

Ya con los parámetros $\{\mathbf{b}, \mathsf{A}\}$ de transición entre el sistema supuesto XYZ y otro sistema X′Y′Z′ quedan determinados los elementos de la matriz P' (o sea las componentes del tensor de proyección P'_{ij}) a la que incumbe en X′Y′Z′ la misma acción de proyección que la de P en el sistema XYZ. En otras palabras, dado el movimiento rígido del sistema de coordenadas, debe ser posible calcular la matriz P'.

Efectivamente, escribamos la relación (15) con base en el sistema X′Y′Z′,

(16) $$\mathsf{v}' = \mathsf{P}'\,\mathsf{u}'$$

donde v' y u' son los vectores transformados según (3-27), o sea

(17) $$\mathsf{v}' = \mathsf{A}\,\mathsf{v} \qquad \mathsf{u}' = \mathsf{A}\,\mathsf{u}$$

Sustituyamos (17) en (16),

$$\mathsf{A}\,\mathsf{v} = \mathsf{P}'\,\mathsf{A}\,\mathsf{u}$$

Multiplicando a la izquierda por la transpuesta de A y recordando que esta transpuesta es al mismo tiempo la inversa,

$$\widetilde{\mathsf{A}}\mathsf{A}\,\mathsf{v} = \mathsf{I}\,\mathsf{v} = \mathsf{v} = \widetilde{\mathsf{A}}\;\mathsf{P}'\,\mathsf{A}\,\mathsf{u}$$

de donde

$$\mathsf{v} = (\widetilde{\mathsf{A}}\;\mathsf{P}'\,\mathsf{A})\,\mathsf{u}$$

Comparando con (15) se obtiene

(18) $\mathsf{P} = \widetilde{\mathsf{A}}\,\mathsf{P}'\,\mathsf{A}$ $\qquad P_{ij} = a_{mi}\, a_{nj}\, P'_{mn}$

De aquí despejamos P′ mediante pre- y posmultiplicación por A y $\widetilde{\mathsf{A}}$, respectivamente,

(19) $\mathsf{P}' = \mathsf{A}\,\mathsf{P}\,\widetilde{\mathsf{A}}$ $\qquad P'_{ij} = a_{im}\, a_{jn}\, P_{mn}$

La ecuación (19) no es otra cosa que la ley de transformación de las componentes del tensor de proyección. De la misma forma se transforma todo tensor de segundo orden.

Apliquemos nuestras facultades de conversión entre las notaciones simbólica y tensorial para arribar a una expresión explícita para las P'_{ij}. Pasemos la relación

$\mathbf{v} = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \bullet \mathbf{n})\, \mathbf{n}$ (Introducida en la sección 4.2)

a la notación tensorial,

$$v_i = u_i - u_k\, n_k\, n_i$$

Para aislar a la derecha el vector u_k, escribamos u_i en la forma $u_i = \delta_{ik}\, u_k$. Entonces

$$v_i = \delta_{ik}\, u_k - u_k\, n_k\, n_i = (\delta_{ik} - n_i\, n_k)\, u_k$$

o sea

(20) $v_i = P_{ik}\, u_k$

donde

(21) $P_{ik} = \delta_{ik} - n_i\, n_k$ $\qquad$ o bien $\qquad P_{ij} = \delta_{ij} - n_i\, n_j$

Usando (19) y (21) hallamos en el sistema primo

(22) $P'_{ij} = a_{ir}\, a_{js}\, P_{rs} = a_{ir}\, a_{js}\, (\delta_{rs} - n_r n_s) = \delta_{rs}\, a_{ir}\, a_{js} - a_{ir}\, a_{js}\, n_r\, n_s$

$= a_{ir}\, a_{jr} - a_{ir}\, a_{js}\, n_r\, n_s = \delta_{ij} - a_{ir}\, a_{js}\, n_r\, n_s$ (Se usó (3-9))

En vista de que $n'_i = a_{ir}\, n_r$, la relación (22) equivale a $P'_{ij} = \delta_{ij} - n'_i\, n'_j$, es decir, la matriz P' es la misma que (7) con las n_i cambiadas por las cantidades primas n'_i. Como debía.

Generalicemos los resultados encontrados.

Definición. Un tensor de segundo orden es un conjunto de 9 componentes T_{ij} las cuales, frente a un movimiento rígido del sistema coordenado, descrito por los parámetros $\{\mathbf{b}, \mathsf{A}\}$, se transforman según la regla

(23) $T'_{ij} = a_{im}\, a_{jn}\, T_{mn}$ o bien $\mathsf{T}' = \mathsf{A}\,\mathsf{T}\,\widetilde{\mathsf{A}}$

o equivalentemente según la relación recíproca

(24) $T_{ij} = a_{mi}\, a_{nj}\, T'_{mn}$ o bien $\mathsf{T} = \widetilde{\mathsf{A}}\,\mathsf{T}'\,\mathsf{A}$

Hay otra manera de definir esta clase de tensor.

Definición alternativa.

Un tensor de segundo orden es un conjunto de 9 componentes T_{ij} que a cada vector u_i le asocian de forma lineal y homogénea otro vector v_i,

(25) $v_i = T_{ij}\, u_j$ o bien $\mathsf{v} = \mathsf{T}\,\mathsf{u}$

(Efectivamente, si consideramos la relación $v'_i = T'_{ij}\, u'_j$, válida en otro sistema X'Y'Z', e insertamos en ella las relaciones de transformación $v'_i = a_{im}v_m$ y $u'_j = a_{jn}u_n$, encontraremos que las T_{ij} deben transformarse tal como dicta la ecuación (23)).

Covariancia de las ecuaciones tensoriales

La notación simbólica empleada para los vectores tiene la ventaja de exhibir explícitamente la independencia de las relaciones vectoriales del sistema de coordenadas. Así por ejemplo, la segunda ley de Newton se enuncia convencionalmente *en cualquier sistema cartesiano* en la forma vectorial

(26) $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$

La justificación viene del hecho de que todos los vectores se transforman de idéntica forma, lo cual conduce a expresiones del tipo

(27) $F_i = m\, a_i$ $F_i' = m\, a_i'$ $F_i'' = m\, a_i''$ etc.

en sistemas cartesianos distintos XYZ, X'Y'Z', X''Y''Z'', etc.

De acuerdo con (27) tendremos que la relación entre la fuerza, la masa y la aceleración es *covariante*, lo que quiere decir que tiene la misma forma en todo sistema de coordenadas.

Todas las relaciones tensoriales son covariantes. Ilustrémoslo para una relación simple que en cierto sistema XYZ es, digamos

(28) $$D_i = \lambda A_i + \mu B_{ij} C_j$$

donde D_i, A_i y C_j son vectores, λ y μ son escalares, y B_{ij} es un tensor de segundo orden. Tranformemos a otro sistema X'Y'Z', dejando λ y μ invariables puesto que son escalares,

$$a_{mi}D'_m = \lambda a_{mi}A'_m + \mu a_{mi}a_{nj}B'_{mn} \cdot a_{rj}C'_r$$

Tomando en cuenta que $a_{nj}\, a_{rj} = \delta_{nr}$, el último término se simplifica a

$$\mu a_{mi}B'_{mn} \cdot \delta_{nr}C'_r = \mu a_{mi}B'_{mn}C'_n$$

Ahora podemos sacar de factor común "a_{mi}", obteniendo

$$a_{mi}\left(D'_m - \lambda A'_m - \mu B'_{mn}C'_n\right) = 0$$

de donde

(29) $$D'_m - \lambda A'_m - \mu B'_{mn}C'_n = 0$$

Comparando (29) con (28) reconocemos que la relación entre los diversos escalares, vectores y tensores tiene la misma forma en el sistema X'Y'Z', o sea, es una relación *covariante*.

En particular, la propiedad de covariancia de expresiones tensoriales que no poseen índices libres significa simplemente que tales expresiones son escalares. Véamoslo para la expresión $E \equiv \lambda\, A_{ij}\, B_i\, C_j$, transformando el lado derecho a

$$\lambda a_{mi}a_{nj}A'_{mn} \cdot a_{ri}B'_r \cdot a_{sj}C'_s$$

El producto $a_{mi}\, a_{nj}\, a_{ri}\, a_{sj}$ se simplifica a $(a_{mi}\, a_{ri})\, (a_{nj}\, a_{sj}) = \delta_{mr}\, \delta_{ns}$, con lo que

$$\lambda\delta_{mr}\delta_{ns}A'_{mn}B'_rC'_s = \lambda A'_{rs}B'_rC'_s = E'$$

Entonces E es un escalar, puesto que su valor en dos sistemas cartesianos cualesquiera es el mismo.

Todas las leyes físicas se expresan en términos de tensores. Por lo mismo son covariantes.

Al analizar la cuestión de cómo deben transformarse las cantidades de orden n, descritas por 3^n componentes, para que al combinarse con otras de órdenes cualesquiera se satisfaga el requisito de covariancia, deducimos la condición expresada en la siguiente definición:

Definición. Un tensor de orden n es un conjunto de 3^n componentes $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ que, frente a un movimiento rígido del sistema de coordenadas, descrito por los parámetros $\{\mathbf{b}, \mathsf{A}\}$, se transforman según la regla

(30) $$T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \ldots j_n}$$

o su recíproca

(31) $$T_{i_1 i_2 \ldots i_n} = a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2} \ldots a_{j_n i_n} T'_{j_1 j_2 \ldots j_n}$$

Para los primeros órdenes tenemos así

$$T' = T$$

$$T'_{i_1} = a_{i_1 j_1} T_{j_1} \qquad (\mathsf{T}' = \mathsf{A}\,\mathsf{T})$$

$$T'_{i_1 i_2} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} T_{j_1 j_2} \qquad (\mathsf{T}' = \mathsf{A}\,\mathsf{T}\,\tilde{\mathsf{A}})$$

$$T'_{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} T_{j_1 j_2 j_3} \qquad ---$$

Etc.

Se sigue de estas reglas de transformación que si las componentes de un tensor son nulas en algún sistema de coordenadas, serán nulas también en cualquier otro sistema:

$$T_{ijk \ldots s} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T'_{ijk \ldots s} = 0$$

Estos se denominan *tensores nulos*.

4.5 ÁLGEBRA TENSORIAL

Un tensor es *simétrico* en dos de sus índices, i y j, si

$$T_{\ldots i \ldots j \ldots} = T_{\ldots j \ldots i \ldots}$$

Ejemplo. El tensor $a_i b_j + a_j b_i$, donde a_i y b_i son vectores, es simétrico.

Un tensor es *antisimétrico* en i y j si

$$T_{\ldots i \ldots j \ldots} = -T_{\ldots j \ldots i \ldots}$$

Ejemplo. El tensor $a_i b_j - a_j b_i$ es antisimétrico.

La suma o diferencia de dos tensores se define sólo cuando ambos son del mismo orden. Ejemplos:

$$A_{ijk} + B_{ijk} \qquad T_{ijkl} - B_{ijkl} \qquad N_{rst} - \lambda\, M_{tsr}$$

El *producto externo* de un tensor de orden n y otro de orden m es un tensor de orden n + m, cuyas componentes son todas las combinaciones de productos de componentes del primer tensor por componentes del segundo. Ejemplos:

$T_{ijk}\, C_{mn}$ es un tensor de orden 5, producto externo de los tensores T_{ijk} y C_{mn}.

$\epsilon_{ijk}\, a_p\, b_m\, c_q$ es un tensor de orden 6, producto externo de cuatro tensores, de órdenes 3, 1, 1 y 1.

El *producto interno* de dos tensores es aquel donde los factores están enlazados por uno o más índices mudos. Ejemplos:

$$T_{ijk}\, C_{mk} \qquad A_i B_i \qquad P_{ij} u_j \qquad C_{ikpm} A_{iqnm}$$

El orden del tensor producto es la cuenta de los índices libres que aparecen en el producto. Para los ejemplos dados, los órdenes son respectivamente 3, 0, 1, y 4.

La *contracción* de un tensor en un par de índices es la operación de igualar ambos índices, convirtiéndolos automáticamente en mudos. Ejemplo: la contracción del tensor T_{ijkm} en sus índices j y m es el tensor T_{imkm} (o lo que es lo mismo, T_{ijkj}). Cada contracción disminuye en dos el orden del tensor.

La contracción de un tensor de segundo orden T_{ij}, o sea T_{ii}, se denomina la *traza* del tensor, la cual es un tensor de orden cero o sea un invariante o escalar.

Ejemplo 1. Dado el tensor de tercer orden T_{ijk}, ¿forman las 9 cantidades T_{3jk} un tensor de segundo orden?

El tensor dado se transforma según la ecuación 30,

$$T_{ijk} = a_{mi}\, a_{nj}\, a_{pk}\, T'_{mnp}$$

Saquemos de aquí las componentes de la forma T_{3jk} poniendo $i = 3$,

$$T_{3jk} = a_{m3}\, a_{nj}\, a_{pk}\, T'_{mnp} = a_{nj}\, a_{pk}\, (a_{m3}\, T'_{mnp})$$

$$= a_{nj}\, a_{pk}\, (a_{13}T'_{1np} + a_{23}T'_{2np} + a_{33}T'_{3np})$$

En virtud de que $T_{3jk} \neq a_{nj}\, a_{pk}\, T'_{3np}$, las cantidades T_{3jk} no forman un tensor.

Ejemplo 2. ¿Forman las cantidades δ_{ij} un tensor?

Hemos definido anteriormente la delta de Kronecker como un *símbolo* completamente desligado de cualquier sistema de coordenadas: $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Pero también podemos ver las cantidades δ_{ij} como un *operador* que, actuando sobre un vector **a**, produce el mismo vector **a**:

(r1) $$a_i = \delta_{ij}\, a_j$$

Con este enfoque, la δ_{ij} será un tensor si en otro sistema X′Y′Z′ su transformada "δ'_{ij}" efectúa la misma operación, es decir, si

(r2) $$a'_i = \delta'_{ij}\, a'_j$$

donde a'_i y a'_j son los transformados de a_i y a_j, respectivamente.

De ser la δ_{ij} un tensor, sus componentes en X′Y′Z′ se transformarían conforme a

$$\delta'_{ij} = a_{im}\, a_{jn}\delta_{mn}$$

Aplicando la delta al factor a_{jn} tenemos $\delta'_{ij} = a_{im}\, a_{jm}$, y luego por (3-9) resulta

(32) $$\delta'_{ij} = \delta_{ij}$$

Por (32) es cierta la relación $a'_i = \delta'_{ij}\, a'_j$, puesto que equivale a $a'_i = \delta_{ij}\, a'_j = a'_i$, y de aquí

se sigue que la delta de Kronecker es un tensor. Este tensor tiene la notable propiedad de que sus componentes se obtienen según la misma regla en todo sistema de coordenadas.

Cabe una aclaración. Los elementos de la matriz de transformación A, es decir las a_{ij}'s, no forman un tensor. La ecuación (3-9), a saber, $a_{im}\, a_{jm} = \delta_{ij}$, no es una relación tensorial; en ella se usa el símbolo δ_{ij} solamente como una *abreviatura* para la regla "igual a 0 si $i \neq j$ e igual a 1 si $i = j$". Es fácil averiguar del contexto cuándo entra la delta como tensor o como "abreviatura" en una expresión. Así por ejemplo, si R_{ij} es un tensor, entonces la delta aparece en calidad de tensor en la relación $R_{ij}\, R_{kj} = \delta_{ik}$.

Finalmente, debemos referirnos a un uso "indebido" de la delta de Kronecker.

Para comprender mejor lo que deseamos explicar, introduzcamos el siguiente símbolo:

(33) $$\delta_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = n \\ 0 & \text{si} \quad i \neq n \end{cases}$$

Podemos usarlo para representar los vectores básicos cartesianos *de un sistema específico* XYZ:

(34) $(\mathbf{i})_i$ = componente "i" del vector $\mathbf{i} = \delta_i^{(1)}$

Análogamente, $(\mathbf{j})_i = \delta_i^{(2)}$ y $(\mathbf{k})_i = \delta_i^{(3)}$

Está claro que el símbolo $\delta_i^{(n)}$ tiene la misma propiedad de selección de índice que tiene la delta de Kronecker δ_{in}. Así como por ejemplo $T_{ik}\delta_{in} = T_{nk}$, también tenemos

$$T_{ik}\,\delta_i^{(n)} = T_{1k}\delta_2^{(n)} + T_{2k}\delta_2^{(n)} + T_{3k}\delta_3^{(n)} = T_{nk}$$

Si deseamos las componentes de $\mathbf{k}$ relativas a otro sistema X'Y'Z', transformamos la $\delta_i^{(3)}$ como vector:

(35) $$\delta_i'^{(3)} = a_{im}\ \delta_m^{(3)} = a_{i3}$$

Efectivamente, las componentes de $\mathbf{k}$ en X'Y'Z' son (a_{13}, a_{23}, a_{33}).

Hemos demostrado que para convertir una ecuación vectorial de la notación simbólica a la tensorial podemos sustituir $\mathbf{i}$ por $\delta_i^{(1)}$, $\mathbf{j}$ por $\delta_i^{(2)}$ y $\mathbf{k}$ por $\delta_i^{(3)}$. El uso indebido mencionado arriba estriba en escribir estos símbolos en la forma δ_{i1}, δ_{i2} y δ_{i3}, cosa que sugiere una relación con la delta de Kronecker, lo cual no es el caso.

Ejemplo 3. Ilustraremos el uso del símbolo definido en el ejemplo precedente, demostrando que el tensor de proyección sobre el plano XY es

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \delta_i^{(3)}\delta_j^{(3)} \qquad (\delta_i^{(3)} \text{ representa al vector unitario } \mathbf{k})$$

Al proyectar el vector **U** = (u_x, u_y, u_z) sobre el plano XY se debe obtener el vector **V** = (u_x, u_y, 0). Apliquemos el tensor dado al vector U_i,

$$V_i = P_{ij}\,U_j = (\delta_{ij} - \delta_i^{(3)}\delta_j^{(3)})U_j = \delta_{ij}\,U_j - \delta_i^{(3)}\delta_j^{(3)}\,U_j$$

$$= U_i - \delta_i^{(3)}\,U_3 = \begin{cases} U_1 & \text{si} \quad i=1 \\ U_2 & \text{si} \quad i=2 \\ 0 & \text{si} \quad i=3 \end{cases} \qquad \text{QED.}$$

Ejemplo 4. Demuestre que la contracción del tensor B_{ijkm} en sus índices j y k es un tensor de segundo orden.

La contracción es B_{ijjm}. Para demostrar su carácter tensorial, partamos de la ley de transformación del tensor B_{ijkm},

$$B'_{ijkm} = a_{ip}\,a_{jq}\,a_{kr}\,a_{ms}\,B_{pqrs}$$

Pongamos k = j,

$$B'_{ijjm} = a_{ip}\,a_{jq}\,a_{jr}\,a_{ms}\,B_{pqrs}$$

Usando la relación

$$a_{jq}\,a_{jr} = \delta_{qr}$$

obtenemos

$$B'_{ijjm} = a_{ip}\,\delta_{qr}\,a_{ms}\,B_{pqrs} = a_{ip}\,a_{ms}\,B_{prrs}$$

Definiendo $b_{im} \equiv B_{ijjm}$, la relación anterior se vuelve

$$b'_{im} = a_{ip}\,a_{ms}\,b_{ps}$$

que es la ley de transformación de los tensores de segundo orden.

Problemas

1. Evaluar la suma $Q_{isp}\delta_{3s}\delta_{p1}$.

2. ¿Cuál es el coeficiente de x_1x_2 en la expresión $f = A_{pqr}x_px_qx_r$? En general, ¿cuál es el coeficiente de x_ix_j?

3. Simplificar la expresión

$$\delta_{kr}\cdot\begin{vmatrix}\delta_{is} & \delta_{im}\\ \delta_{js} & \delta_{jm}\end{vmatrix}B_{ijk}$$

4. Dado $T_{ijkm} = A_{ip}\,B_{jpqk}\,C_{qm}$, escribir la expresión que corresponde a T_{pijq}.

5. Pasar a notación de matrices las expresiones

$$E = B_{ij}\,a_j\,b_i \qquad\qquad g_{ik} = b_{is}c_{js}d_{jm}e_{mp}f_{kp}$$

6. Pasar a notación tensorial las expresiones

(a) $\nu\mathbf{V} - \kappa(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})(\mathbf{C}\bullet\mathbf{D})\mathbf{K}$ (b) $[(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{M})\bullet\mathbf{Q}]\mathbf{AB} - (\mathbf{u}\bullet\mathbf{s})\mathbf{P}$

(c) $\widetilde{\mathsf{M}} = \mathsf{Q}\widetilde{\mathsf{P}}\mathsf{C}\widetilde{\mathsf{R}}$ (d) $\mathsf{N}^3 = \mathsf{I}$

7. Pasar a notación simbólica las expresiones

(a) $a_mb_ic_md_i$ (b) $p_iq_rt_sz_sw_i$

(c) $f_ig_mh_m - \mu h_i + a_pb_pc_id_qe_q$ (d) $a_i = b_md_mc_i - b_mc_md_i$

8. Evaluar la derivada

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(Q_{pqr}x_px_qx_r\right)$$

9. Los vectores unitarios de la base cartesiana en XYZ son $\delta_i^{(n)}$, con n = 1, 2 y 3 para **i**, **j** y **k**, respectivamente. Aplicando la ley de transformación de vectores, demostrar que las componentes de **i**, **j** y **k** en el sistema X′Y′Z′ son $\delta_i'^{(n)} = a_{in}$. Note que esta delta prima ya no posee la propiedad de selección de índice.

10. Para el tensor de proyección sobre un plano, $P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$, demuestre e interprete las relaciones

(a) $P_{ij}\, n_j = 0$ (b) $P_{ij}\, P_{jk} = \delta_{ik}$ (c) $P_{ij}\, m_j = m_i$ si $m_i n_i = 0$

11. Demuestre que el ángulo entre un vector **u** y su proyección vectorial sobre un plano es

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{P_{ij} u_i u_j}{\det(P) \cdot u^2}\right)$$

donde P_{ij} es el tensor de proyección

12. Sea e_i un vector unitario. ¿Qué hace el tensor $Q_{ij} \equiv e_i e_j$?

13. Si a_i y b_i son vectores, demuestre que $a_i b_j$ es un tensor de segundo orden.

14. Demuestre la covariancia de la ecuación (entre puros tensores)

$$M_{ijk} = \lambda a_i B_{jk} - \mu C_{ss} D_{ijk}$$

15. Demuestre que la expresión

$$E = \lambda\, Q_{ijkmn}\, A_{ij} C_k P_{mn}$$

es un escalar.

16. Si u_i, v_i y w_i son vectores y la expresión

$$f = A_{ijk} u_i v_j w_k$$

es un escalar, demuestre que necesariamente A_{ijk} es un tensor.

17. ¿Cómo se transforma la expresión $x_i x_j$? ($x_i = \{x, y, z\}$)

CAPÍTULO 5	EL TENSOR ÉPSILON

5.1 Tensores isotrópicos

Un *tensor isotrópico* es aquel cuyas componentes se transforman en sí mismas. Su ley de transformación es pues

(1) $$T'_{ijk\ldots mn} = a_{ip}\, a_{jq}\, a_{kr} \ldots a_{ms}\, a_{nt}\, T_{pqr\ldots st} = T_{ijk\ldots mn}$$

Un caso no trivial de tensor isotrópico ya conocido es el tensor δ_{ij}, de segundo orden. Especialmente importante es el tensor isotrópico de tercer orden, el cual denotaremos con E_{ijk}. Procederemos a calcular sus componentes a partir de la condición (1), por un método largo pero instructivo. Empecemos de la relación definitoria

(2) $$E'_{ijk} = a_{im}\, a_{jn}\, a_{kp}\, E_{mnp} = E_{ijk}$$

Agrupemos sus 27 componentes en tres clases:

I. Todos los índices iguales,

$i = j = k$: $E_{111}, E_{222}, E_{333}$

II. Dos índices iguales,

$i = j \neq k$: $E_{112}, E_{113}, E_{221}, E_{223}, E_{331}, E_{332}$

$j = k \neq i$: $E_{211}, E_{311}, E_{122}, E_{322}, E_{133}, E_{233}$

$k = i \neq j$: $E_{121}, E_{131}, E_{212}, E_{232}, E_{313}, E_{323}$

III. Los tres índices distintos,

$i \neq j \neq k$: $E_{123}, E_{231}, E_{312}, E_{132}, E_{213}, E_{321}$

Ahora someteremos el sistema de coordenadas XYZ a un movimiento rígido; lo giramos un ángulo de 120° alrededor del eje que pasa por el origen O y está definido por el unitario $\mathbf{e} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. En esta rotación el eje nuevo X queda donde estaba el eje viejo Y, el eje Y va a dar a Z, y el eje Z va a dar a X (Fig. 1).

Bajo este movimiento el vector (A_1, A_2, A_3) se transforma en (A_2, A_3, A_1), o sea que sus componentes se permutan cíclicamente. La matriz de transformación es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

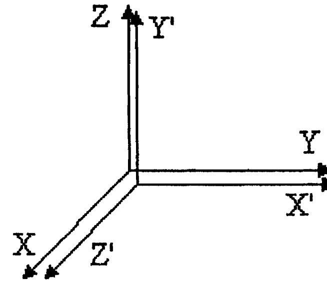


Fig. 1

Notemos que los elementos de A diferentes de cero tienen la forma a_{ii^+}, donde "i^+" es el "consecutivo cíclico" de "i", o sea

$$i^+ = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i = 1 \\ 3 & \text{si} \quad i = 2 \\ 1 & \text{si} \quad i = 3 \end{cases} \qquad \text{(ya que } a_{12} = a_{23} = a_{31} = 1\text{)}$$

Se comprueba que $a_{ij} = \delta_{i^+j}$, con lo que la relación (2) se vuelve

$$E_{ijk} = \delta_{i^+m}\delta_{j^+n}\delta_{k^+p}E_{mnp} = E_{i^+j^+k^+}$$

Obtenemos de aquí las 18 igualdades

$$(3) \qquad \left[\begin{array}{ll} E_{111} = E_{222} = E_{333} & \\ E_{112} = E_{223} = E_{331}; & E_{113} = E_{221} = E_{332} \\ E_{211} = E_{322} = E_{133}; & E_{311} = E_{122} = E_{233} \\ E_{121} = E_{232} = E_{313}; & E_{131} = E_{212} = E_{323} \\ E_{123} = E_{231} = E_{312}; & E_{132} = E_{213} = E_{321} \end{array} \right.$$

Sometamos ahora el sistema XYZ a una rotación de 180° en torno al eje Z, cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j)$$

Al efectuar la triple suma sobre m, n y p en (2), sobrevive solamente el término para el cual m = i, n = j y p = k,

$$E_{ijk} = a_{ii}\, a_{jj}\, a_{kk}\, E_{ijk} \qquad \text{¡No } \Sigma(i, j, k)!$$

Si el producto $a_{ii}a_{jj}a_{kk}$ es igual a –1, entonces

$$E_{ijk} = -E_{ijk} \qquad \Rightarrow \qquad E_{ijk} = 0$$

Ello ocurre para ijk = 111, 222, 112, 211, 221, 122, 121, 212, 331 y 332. Junto con las igualdades (3) se deduce que todos los elementos de las clases I y II son iguales a cero, lo cual expresaremos así:

$$E_{ijk} = 0 \qquad \text{si dos o más índices son iguales}$$

Finalmente, apliquemos una rotación de 45° alrededor del eje Z, cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a_{3j} = 0 \text{ si } j \neq 3)$$

Obtenemos

$$E_{123} = a_{1m}\, a_{2n}\, a_{3p}\, E_{mnp} = a_{1m}\, a_{2m}\, a_{33}\, E_{mn3} = a_{1m}\, a_{2n}\, E_{mn3}$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, E_{123} + a_{12}\, a_{21}\, E_{213} = \frac{1}{2}(E_{123} - E_{213})$$

$$\Rightarrow \qquad E_{123} = -E_{213}$$

Así pues, las componentes distintas de cero del tensor E_{ijk} toman un sólo valor común λ, que debe ser un invariante: $E_{123} = E_{231} = E_{312} = \lambda$; $E_{132} = E_{213} = E_{321} = -\lambda$. Tenemos así el siguiente teorema:

Teorema. El tensor isotrópico más general de tercer orden es un múltiplo "λ" del tensor épsilon o tensor de Levi-Civita, ϵ_{ijk}, definido por

$$(4) \qquad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{ijk\} \text{ es una permutación par de } \{123\} \\ -1 & \text{si } \{ijk\} \text{ es una permutación impar de } \{123\} \\ 0 & \text{si dos o más índices son iguales} \end{cases}$$

5.2 PROPIEDADES DEL TENSOR ÉPSILON

Relación del tensor épsilon con la matriz de transformación

De la relación de transformación $\in_{ijk} = a_{im}\, a_{jn}\, a_{kp} \in_{mnp}$ tenemos, efectuando las sumas indicadas y escribiendo solamente los términos distintos de cero,

$$\in_{ijk} = a_{i1}a_{j2}a_{k3} \in_{123} + a_{i2}a_{j3}a_{k1} \in_{231} + a_{i3}a_{j1}a_{k2} \in_{312} +$$

$$+ a_{i1}a_{j3}a_{k2} \in_{132} + a_{i2}a_{j1}a_{k3} \in_{213} + a_{i3}a_{j2}a_{k1} \in_{321} =$$

$$= a_{i1}a_{j2}a_{k3} + a_{i1}a_{j2}a_{k3} + a_{i1}a_{j2}a_{k3} - a_{i1}a_{j2}a_{k3} - a_{i1}a_{j2}a_{k3} - a_{i1}a_{j2}a_{k3}$$

Esto es,

(5) $$\in_{ijk} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{j1} & a_{k1} \\ a_{i2} & a_{j2} & a_{k2} \\ a_{i3} & a_{j3} & a_{k3} \end{vmatrix}$$

Producto externo de dos tensores épsilon

Usando la representación (5) encontraremos a continuación una fórmula útil. Consideremos el producto

$$\in_{ijk} \in_{mnp} = = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{j1} & a_{k1} \\ a_{i2} & a_{j2} & a_{k2} \\ a_{i3} & a_{j3} & a_{k3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m1} & a_{n1} & a_{p1} \\ a_{m2} & a_{n2} & a_{p2} \\ a_{m3} & a_{n3} & a_{p3} \end{vmatrix}$$

El producto de los dos determinantes es a su vez otro determinante, cuyos elementos se obtienen combinando ya sea las columnas del primer factor con las columnas del segundo, o bien columnas con renglones, o renglones con renglones. Escojamos combinar columnas con columnas; entonces el elemento 11 del determinante producto es

$$a_{i1}\, a_{m1} + a_{i2}\, a_{m2} + a_{i3}\, a_{m3} = a_{ir}\, a_{mr} = \delta_{im}$$

Análogamente, los elementos restantes también son deltas de Kronecker. Resulta

(6) $$\in_{ijk} \in_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{jm} & \delta_{km} \\ \delta_{in} & \delta_{jn} & \delta_{kn} \\ \delta_{ip} & \delta_{jp} & \delta_{kp} \end{vmatrix}$$

Producto interno simple de dos tensores épsilon (en un índice)

Pongamos p = k en la representación (6) y desarrollemos,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{jm} & \delta_{km} \\ \delta_{in} & \delta_{jn} & \delta_{kn} \\ \delta_{ik} & \delta_{jk} & \delta_{kk} \end{vmatrix}$$

$$= 3\,\delta_{im}\,\delta_{jn} + \delta_{in}\,\delta_{jk}\,\delta_{km} + \delta_{ik}\,\delta_{jm}\,\delta_{kn}$$

$$-\,\delta_{ik}\,\delta_{jn}\,\delta_{km} - 3\,\delta_{in}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jk}\,\delta_{kn}$$

Reduciendo,

(7) $$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

Esta fórmula tiene muchas aplicaciones, como veremos.

Antisimetría del tensor épsilon en dos de sus índices

Al transponer dos índices cualesquiera del tensor épsilon se produce un cambio de signo:

$i \leftrightarrow j \qquad \epsilon_{ijk} = -\,\epsilon_{jik}$

$j \leftrightarrow k \qquad \epsilon_{ijk} = -\,\epsilon_{ikj}$

$k \leftrightarrow i \qquad \epsilon_{ijk} = -\,\epsilon_{kji}$

Se sigue que al mover un índice dos lugares no se modifica el valor,

$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} \qquad \epsilon_{pqr} = \epsilon_{rpq} \qquad$ etc.

Otras propiedades

Daremos sin demostración estas otras propiedades:

(8) $$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{mnk} + \epsilon_{jmk}\,\epsilon_{ink} + \epsilon_{mik}\,\epsilon_{jnk} = 0$$

(9) $$\epsilon_{ijk}\,\delta_{mn} = \epsilon_{njk}\,\delta_{im} + \epsilon_{ink}\,\delta_{jm} + \epsilon_{ijn}\,\delta_{km}$$

5.3 Producto vectorial y triples productos

El tensor épsilon nos permite escribir el producto vectorial **a** × **b** en notación tensorial del siguiente modo:

(10) $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \in_{ijk} a_j b_k$$

Para comprobarlo, evaluemos una de las componentes del producto **a** × **b**, digamos la componente X,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 = \in_{1jk} a_j b_k$$

Al efectuar las sumas sobre los índices j y k, permanecen solamente los términos con j = 2 y k = 3, y con j = 3 y k = 2, ya que los restantes valores de j y k provocan repetición de índices en $\in_{ijk}$. Entonces,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 = \in_{123} a_2 b_3 + \in_{132} a_3 b_2$$

Usando $\in_{123} = 1$ y $\in_{132} = -1$ llegamos a

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$ o bien

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x = a_y b_z - a_z b_y$$

como debía resultar. De modo similar podemos comprobar las otras dos componentes.

El triple producto escalar **a** • (**b** × **c**) es el escalar formado con el tensor $\in_{ijk}$ y los vectores a_i, b_i y c_i,

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_i (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_i = a_i \in_{ijk} b_j c_k$$

Rearreglando los factores,

(11) $$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \in_{ijk} a_i b_j c_k$$

El triple producto vectorial **a** × (**b** × **c**) es un vector cuya componente "i" es

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \in_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k = \in_{ijk} a_j (\in_{kmn} b_m c_n)$$

o sea,

(12) $$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \in_{ijk} \in_{kmn} a_j b_m c_n$$

Ejemplo 1. Pasar a notación tensorial las expresiones

(a) $\mathbf{M} \times [\mathbf{N} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{R})]$
(a) $(\mathbf{T} \times \mathbf{P}) \bullet (\mathbf{Q} \times \mathbf{M})$
(b) $(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})(\mathbf{v} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{e})) \bullet \mathbf{d}$

(a) El resultado es un vector. Su componente "i" es

$$\in_{ijk} M_j\, [\mathbf{N} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{R})]_k = \in_{ijk} M_j\, [\in_{kmn} N_m\, (\mathbf{P} \times \mathbf{R})_n] =$$

$$= \in_{ijk} M_j \in_{kmn} N_m\, (\in_{nrs} P_r\, R_s) =$$

$$= \in_{ijk} \in_{kmn} \in_{nrs} M_j\, N_m\, P_r\, R_s$$

(b) El resultado es un escalar.

$$(\mathbf{T} \times \mathbf{P}) \bullet (\mathbf{Q} \times \mathbf{M}) = (\in_{ijk} T_j\, P_k)\, (\in_{imn} Q_m\, M_n)$$

$$= \in_{ijk} \in_{imn} T_j\, P_k\, Q_m\, M_n$$

(c) El resultado es un escalar.

$$(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})(\mathbf{v} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{e})) \bullet \mathbf{d} = (a_i\, b_i)\, (\in_{jkm} \in_{mnr} v_k\, c_n\, e_r)\, d_j$$

$$= (a_i\, b_i) \in_{jkm} \in_{mnr} v_k\, c_n\, e_r\, d_j$$

Ejemplo 2. Demostrar la relación

(13) $$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\, \mathbf{c}$$

Copiemos aquí la ecuación (12),

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \in_{ijk} \in_{kmn} a_j\, b_m\, c_n = \in_{ijk} \in_{mnk} a_j\, b_m\, c_n$$

Usemos la fórmula (7),

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = (\delta_{im}\, \delta_{jn} - \delta_{in}\, \delta_{jm}) a_j b_m c_n = \delta_{im}\, \delta_{jn}\, a_j b_m c_n - \delta_{in}\, \delta_{jm} a_j b_m c_n =$$

$$= a_n b_i c_n - a_m b_m c_i = [(\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\, \mathbf{c}]_i \qquad \text{QED}$$

Problemas

1. Demostrar la representación

$$(14) \qquad \in_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

2. Sea u_i, v_i, w_i una base ortonormal derecha de vectores. Verificar componente a componente la representación

$$(15) \qquad \in_{ijk} = \begin{vmatrix} u_i & v_i & w_i \\ u_j & v_j & w_j \\ u_k & v_k & w_k \end{vmatrix}$$

3. Demostrar las relaciones

(a) $\delta_{ij} \in_{ijk} = 0$ (b) $\in_{ijk} \in_{ijm} = 2\, \delta_{km}$ (c) $\in_{ijk} \in_{ijk} = 6$

4. Suponiendo que S_{ij} es un tensor simétrico, demostrar que $\in_{ijk} S_{jk} = 0$.

5. Suponiendo que A_{ij} es un tensor antisimétrico, y que $a_i = \frac{1}{2} \in_{ijk} A_{jk}$, demostrar que

$$A_{ij} = \in_{ijk} a_k$$

6. Demostrar que

$$\Lambda_{ijkm} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{km} + \mu\, \delta_{ik}\, \delta_{jm} + \nu\, \delta_{im}\, \delta_{jk}$$

donde λ, μ y ν son escalares, es un tensor isotrópico de cuarto orden. (Esta es la forma más general de tal tensor).

7. Demostrar la relación

$$(16) \qquad T_{ij} - T_{ji} = \in_{ijk} \in_{mnk} T_{mn}$$

8. Si $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = 0$, reduzca la expresión

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i\, (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_j = ?$$

9. Usando las propiedades del tensor épsilon, demostrar las relaciones

(a) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})(\mathbf{B} \bullet \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{D})(\mathbf{B} \bullet \mathbf{C})$

(b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C} \times \mathbf{B})\, \mathbf{B} - (\mathbf{B} \bullet \mathbf{C} \times \mathbf{D})\, \mathbf{A}$

Existe otra manera alternativa de expresar la relación (b). Encuéntrela.

10. Usando la fórmula (6), demostrar que

$$(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} \times \mathbf{C})(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \bullet \mathbf{a} & \mathbf{A} \bullet \mathbf{b} & \mathbf{A} \bullet \mathbf{c} \\ \mathbf{B} \bullet \mathbf{a} & \mathbf{B} \bullet \mathbf{b} & \mathbf{B} \bullet \mathbf{c} \\ \mathbf{C} \bullet \mathbf{a} & \mathbf{C} \bullet \mathbf{b} & \mathbf{C} \bullet \mathbf{c} \end{vmatrix} \tag{17}$$

11. Escribir en notación tensorial o simbólica, según el caso,

(a) $\in_{ijk} A_j A_k = 0$

(b) $\mathbf{V} = \mathbf{U} \times \mathbf{W} + (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})\, \mathbf{L} \times \mathbf{M}$

(c) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \times (\mathbf{E} \times \mathbf{F})$

(d) $\in_{ijk} \in_{kmn} \in_{npq} A_j B_m C_p D_q$

12. Demostrar las siguientes expresiones tensoriales para el determinante 3 × 3 cuyos elementos son u_{ij}:

$$\det(u_{ij}) = \in_{ijk} u_{i1}\, u_{j2}\, u_{k3}$$

$$\det(u_{ij}) = \frac{1}{6} \in_{ijk} \in_{pqr} u_{ip}\, u_{jq}\, u_{kr}$$

CAPÍTULO 6	ALGUNOS TENSORES DE SEGUNDO ORDEN

6.1 EL TENSOR DE ROTACIÓN

Sea **A** un vector arbitrario. Rotémoslo en cierto ángulo θ alrededor del eje especificado por un vector unitario **e**, y sea **B** el vector que resulta (Fig.1).

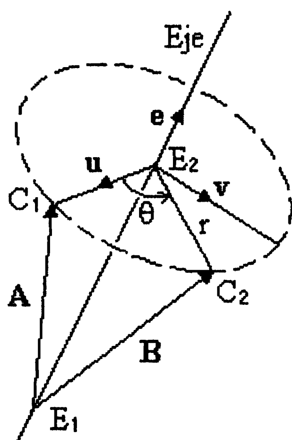


Fig. 1

Matemáticamente, **B** se obtendrá de **A** mediante la aplicación de un tensor R_{ij} de segundo orden en la forma

(1) $$B_i = R_{ij}A_j$$

R_{ij} se denomina *tensor de rotación*. Obtendremos este tensor en términos de los parámetros de la rotación, que son

– El eje de rotación **e**

– El ángulo de rotación θ

Pongamos $\mathbf{A} \equiv \mathbf{E_1C_1}$ y supongamos por simplicidad que el punto inicial E_1 esté sobre el eje de rotación. Pongamos también $\mathbf{B} \equiv \mathbf{E_1C_2}$ y sea E_1E_2 la proyección de **A** sobre el eje de rotación, misma que la de **B**.

Sea **u** el vector unitario en la dirección E_2C_1, y $\mathbf{v} \equiv \mathbf{e} \times \mathbf{u}$ el vector que completa con **e** y **u** una base ortonormal. Partiendo de la relación $\mathbf{B} = \mathbf{E_1E_2} + \mathbf{E_2C_2}$ tenemos

$$\mathbf{E_1E_2} = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{e})\,\mathbf{e}$$

y $$\mathbf{E_2C_2} = r\cos\theta\,\mathbf{u} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{v}$$

donde $r \equiv E_2C_1 = E_2C_2$ es radio de la circunferencia que describe la punta de A en la rotación. Ahora bien,

$$r\,\mathbf{u} = \mathbf{A} - \mathbf{E_1E_2} = \mathbf{A} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{e})\,\mathbf{e}$$

y $$r\,\mathbf{v} = r\,\mathbf{e} \times \mathbf{u} = \mathbf{e} \times (r\,\mathbf{u}) = \mathbf{e} \times [\mathbf{A} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{e})\,\mathbf{e}] = \mathbf{e} \times \mathbf{A}$$

Finalmente,

(2) $$\mathbf{B} = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{e})\,\mathbf{e} + [\mathbf{A} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{e})\,\mathbf{e}]\cos\theta + \mathbf{e} \times \mathbf{A}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Pasemos este resultado a notación tensorial, usando

$$[(\mathbf{A} \bullet \mathbf{e})\, \mathbf{e}]_i = A_j\, e_j\, e_i \qquad\qquad (\mathbf{e} \times \mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk}\, e_j\, A_k$$

Queda

$$B_i = A_j\, e_j\, e_i + (A_i - A_j\, e_j\, e_i) \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\, \epsilon_{ijk}\, e_j\, A_k$$

Para separar el factor A_j usemos

$$A_i = \delta_{ij}\, A_j \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \epsilon_{ijk}\, e_j\, A_k = -\epsilon_{ijk}\, e_k\, A_j$$

Obtenemos

(3) $$B_i = R_{ij}\, A_j$$

con

(4) $$R_{ij} = e_i\, e_j + (\delta_{ij} - e_i\, e_j) \cos\theta - \epsilon_{ijk}\, e_k \operatorname{sen}\theta$$

Este es el tensor buscado.

En notación de matrices, la relación $B_i = R_{ij}\, A_j$ se escribe

(5) $$\mathsf{B} = \mathsf{R}\,\mathsf{A}$$

donde

(6) $$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

y la matriz de rotación es

(7) $$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} c + \bar{c}e_1^2 & \bar{c}e_1e_2 - se_3 & \bar{c}e_1e_3 + se_2 \\ \bar{c}e_1e_2 + se_3 & c + \bar{c}e_2^2 & \bar{c}e_2e_3 - se_1 \\ \bar{c}e_1e_3 - se_2 & \bar{c}e_2e_3 + se_1 & c + \bar{c}e_3^2 \end{pmatrix}$$

Hemos usado aquí las abreviaturas

(8) $$c \equiv \cos\theta \qquad\qquad \bar{c} \equiv 1 - \cos\theta \qquad\qquad s \equiv \operatorname{sen}\theta$$

A partir de (4) se demuestra que

(9) $$R_{ij}\,R_{kj} = \delta_{ik}$$

y que

(10) $$\det(R) = 1 \qquad R\tilde{R} = I \qquad \tilde{R} = R^{-1}$$

Está claro que la rotación $R(\mathbf{e}, \theta)$ tiene por inversa la rotación $\tilde{R}(\mathbf{e}, -\theta)$; es fácil comprobar que al sustituir $\theta \to -\theta$ en (7), R se transforma en su transpuesta $\tilde{R}$.

6.2. Obtención del eje y el ángulo de rotación a partir del tensor de rotación

Dado un tensor de rotación R_{ij}, veamos cómo extraer el eje de rotación **e** y el ángulo de rotación θ asociados al tensor.

Partamos de la expresión (4),

$$R_{ij} = e_i\,e_j + (\delta_{ij} - e_i\,e_j)\cos\theta - \epsilon_{ijk}\,e_k \operatorname{sen}\theta$$

Calculemos la traza de este tensor,

$$R_{ii} = e_i\,e_i + (\delta_{ii} - e_i\,e_i)\cos\theta - \epsilon_{iik}\,e_k \operatorname{sen}\theta$$

Usando $e_i\,e_i = \mathbf{e} \bullet \mathbf{e} = 1$, $\delta_{ii} = 3$ y $\epsilon_{iik} = 0$ obtenemos

$$R_{ii} = 1 + (3 - 1)\cos\theta = 1 + 2\cos\theta$$

de donde

(11) $$\cos\theta = \frac{1}{2}(R_{ii} - 1)$$

Por otra parte, para calcular el vector **e**, multipliquemos R_{ij} por ϵ_{ijm},

$$\epsilon_{ijm}\,R_{ij} = \epsilon_{ijm}\,e_i\,e_j + (\epsilon_{ijm}\,\delta_{ij} - \epsilon_{ijm}\,e_i\,e_j)\cos\theta - \epsilon_{ijm}\,\epsilon_{ijk}\,e_k \operatorname{sen}\theta$$

Usando

$$\epsilon_{ijm}\,e_i\,e_j = (\mathbf{e}\times\mathbf{e})_m = 0 \qquad \epsilon_{ijm}\,\delta_{ij} = \epsilon_{iim} = 0 \qquad \epsilon_{ijm}\,\epsilon_{ijk} = 2\,\delta_{mk}$$

simplificamos a

$$\in_{ijm} R_{ij} = -2\, \delta_{mk}\, e_k \operatorname{sen}\theta = -2\, e_m \operatorname{sen}\theta$$

de donde

(12) $$e_m = -\frac{1}{2 \operatorname{sen}\theta} \in_{ijm} R_{ij}$$

Desarrollando,

$$e_1 = -\frac{R_{23} - R_{32}}{2 \operatorname{sen}\theta} \qquad e_2 = -\frac{R_{31} - R_{13}}{2 \operatorname{sen}\theta} \qquad e_3 = -\frac{R_{12} - R_{21}}{2 \operatorname{sen}\theta}$$

Nota. A todo tensor de segundo orden, T_{ij}, se le puede asociar trivialmente un escalar y un vector. El "escalar del tensor" es su traza T_{ii}; el "vector del tensor" es el dado por el producto externo $\in_{ijk} T_{ij}$. En el caso del tensor de rotación, su escalar y su vector poseen una interpretación geométrica directa, como vimos.

6.3 Relación del tensor de rotación con la matriz de transformación

El sistema cartesiano X′Y′Z′ está trasladado y *rotado* con respecto al sistema XYZ. Surge la pregunta, ¿cuál es el tensor de rotación R_{ij} que produce el sistema X′Y′Z′ a partir del XYZ? Resulta que tal tensor guarda una relación estrecha con la matriz de transformación A.

Suponiendo entonces que los vectores básicos rotados, **i′**, **j′** y **k′** se obtienen a través de una rotación mediada por un tensor R_{ij}, escribimos

$$i_p' = R_{pq}\, i_q \qquad j_p' = R_{pq}\, j_q \qquad k_p' = R_{pq}\, k_q$$

En vista de las relaciones

$$i_p = \delta_p^{(1)} \qquad j_p = \delta_p^{(2)} \qquad k_p = \delta_p^{(3)}$$

Tendremos entonces

$$i_p' = R_{pq}\delta_q^{(1)} = R_{p1} \qquad j_p' = R_{p2} \qquad k_p' = R_{p3}$$

Calculemos uno de los elementos de la matriz de transformación, digamos a_{23},

$$a_{23} \equiv \cos \angle(Y', Z) = \mathbf{j}' \bullet \mathbf{k} = j_p'\, k_p = R_{p2}\, \delta_p^{(3)} = R_{32}$$

Se ve que la matriz transpuesta de A es la que efectúa la rotación de la base ortonormal,

(13) $\mathsf{R} = \widetilde{\mathsf{A}}$ o bien $R_{ij} = a_{ji}$

La interpretación de esta relación es simple: rotar un vector en torno a cierto eje **e** en un ángulo θ modifica sus componentes de la misma manera que si se deja el vector fijo y se rota el sistema de coordenadas en torno al mismo eje en un ángulo −θ.

6.4 Rotaciones infinitesimales

En las rotaciones infinitesimales el ángulo de rotación es "infinitesimal" y lo denotaremos con dθ. A primer orden en dθ tendremos

$$\cos d\theta \approx 1 \qquad \text{sen}\, d\theta \approx d\theta$$

El tensor de rotación se convierte en

$$R_{ij}(\mathbf{e}, d\theta) = e_i\, e_j + (\delta_{ij} - e_i\, e_j) \cos d\theta - \epsilon_{ijk}\, e_k\, \text{sen}\, d\theta$$

(14) $$\Rightarrow \qquad R_{ij}(\mathbf{e}, d\theta) = \delta_{ij} - \epsilon_{ijk}\, e_k\, d\theta$$

Como matriz,

(15) $$\mathsf{R}(\mathbf{e}, \theta) = \mathsf{I} + \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} d\theta$$

Apliquemos esta rotación a un vector arbitrario **A** (Fig. 2),

$$B_i = R_{ij}\, A_j = (\delta_{ij} - \epsilon_{ijk}\, e_k\, d\theta)\, A_j$$

$$= A_i - \epsilon_{ijk}\, e_k\, A_j\, d\theta$$

$$= (\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{e}\, d\theta)_i$$

Poniendo

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + d\mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}\, d\theta \equiv \mathbf{d\theta}$$

Resulta

(16) $$d\mathbf{A} = \mathbf{d\theta} \times \mathbf{A}$$

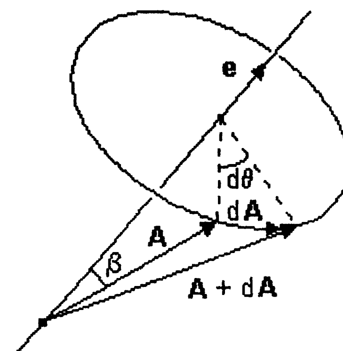


Fig. 2

Examinando la Fig. 2 podemos comprobar que la dirección de **dA** es perpendicular tanto a la dirección del eje de rotación (misma que la de **dθ**) como a la dirección del vector original **A**. Por otra parte, para la magnitud de **dA** se obtiene geométricamente dA = A dθ sen β, donde β es el ángulo formado por el eje **e** y el vector **A**.

Notemos además que en la notación matricial tenemos

(17) $$\begin{pmatrix} dA_x \\ dA_y \\ dA_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d\theta_z & d\theta_y \\ d\theta_z & 0 & -d\theta_x \\ -d\theta_y & d\theta_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} d\theta$$

La matriz infinitesimal implicada es *antisimétrica*.

6.5 Derivada de un vector dependiente del tiempo

Sea **V** un vector de cualquier clase. Escribámoslo en forma de un producto de magnitud y dirección,

(18) $\mathbf{V} = V\,\mathbf{v}$ donde V es la magnitud de **V** y **v** es el vector unitario en la misma dirección que **V**

Saquemos la derivada del vector **V** con respecto al tiempo t,

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\mathbf{v} + V\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

La derivada del unitario **v** es otro vector. En virtud de que **v** varía solamente en dirección, no le queda más que trasladarse y rotar, es decir, efectuar un movimiento rígido. En la traslación, **v** se mueve paralelamente a sí mismo y sus componentes no varían, de modo que su variación d**v** proviene exclusivamente de su rotación. Por la ecuación (16) tenemos entonces que d**v** = **dθ** × **v**, donde **dθ** describe la rotación infinitesimal del vector. De aquí,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{d\theta} \times \mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{d\theta}}{dt} \times \mathbf{v} \equiv \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$$

La derivada $\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{d\theta}}{dt}$ se define como la "velocidad angular" del vector **v** (ó **V**). Entonces,

(19) $$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$$

En particular, si el vector **V** es de magnitud constante, su derivada es

(20) $$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$$ si |**V**| es constante

6.6 VELOCIDADES Y ACELERACIONES DE LOS PUNTOS DE UN CUERPO RÍGIDO

Demostraremos a continuación un teorema cinemático importante, concerniente al movimiento del cuerpo rígido.

Supongamos que el sistema XYZ está fijo a un marco de referencia inercial, y que X′Y′Z′ está fijo a un cuerpo rígido $\mathcal{C}$ (llamado también *sólido* en un contexto cinemático), que se encuentra en movimiento con respecto al sistema XYZ. Sea C, un punto del sólido, el origen del sistema móvil X′Y′Z′ (Fig. 3).

Podemos ver el movimiento del cuerpo como una sucesión continua de transformaciones que llevan el sistema fijo XYZ a sucesivos sistemas X′Y′Z′ fijos al cuerpo. Los parámetros de la transformación, esto es, los elementos a_{ij} de la matriz de transformación A y el vector de posición **b** del origen C, serán funciones del tiempo t,

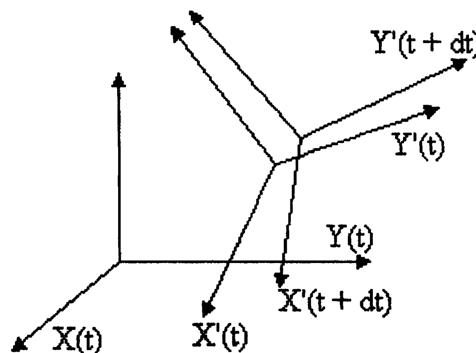


Fig. 3

$$a_{ij}(t) = \cos \angle(X_i'(t), X_j) = \text{cosenos directores de los ejes } X_i' \text{ al tiempo t}$$

$$b_i(t) = (\mathbf{OC})_i = \text{vector de posición del punto origen C al tiempo t}$$

Para todo punto P *del cuerpo* $\mathcal{C}$, de coordenadas x_i en el sistema fijo XYZ y coordenadas x_i' en X′Y′Z′, es decir, relativas al cuerpo, tendremos por la ley de transformación de las coordenadas,

(21) $$x_i = a_{ji}(t)\, x'_j + b_i(t)$$

Derivemos con respecto al tiempo,

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{da_{ji}}{dt} x'_j + a_{ji} \frac{dx'_j}{dt} + \frac{db_i}{dt}$$

Como P está fijo en el sistema X′Y′Z′, se anula la derivada $\frac{dx'_j}{dt}$ y

(22) $$v_i = \dot{a}_{ji}\, x'_j + \dot{b}_i$$

donde los puntos arriba de las a_{ji}'s y b_i's denotan derivación con respecto al tiempo. Para evaluar las derivadas de las a_{ji}'s partimos de su definición. Será más fácil considerar una de ellas, digamos a_{32}, y deducir la forma general para cualquier a_{ji},

$$a_{32} = \cos \angle(Z', Y) = \mathbf{k}'(t) \bullet \mathbf{j}$$

$$\dot{a}_{32} = \frac{d}{dt}(\mathbf{k}' \bullet \mathbf{j}) = \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \bullet \mathbf{j}$$

Usando (20) tenemos

$$\frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \Omega \times \mathbf{k}'$$

donde Ω es la velocidad angular del cuerpo[1]. Resulta entonces

(23) $$\dot{a}_{32} = \Omega \times \mathbf{k}' \bullet \mathbf{j}$$

De manera similar, calculemos v_1,

$$v_1 = \dot{a}_{11}x_1' + \dot{a}_{21}x_2' + \dot{a}_{31}x_3' + \dot{b}_1$$

$$= (\Omega \times \mathbf{i}' \bullet \mathbf{i})\, x_1' + (\Omega \times \mathbf{j}' \bullet \mathbf{i})\, x_2' + (\Omega \times \mathbf{k}' \bullet \mathbf{i})\, x_3' + \dot{b}_1$$

$$= \Omega \times (x_1'\,\mathbf{i}' + x_2'\,\mathbf{j}' + x_3'\,\mathbf{k}') \bullet \mathbf{i} = \Omega \times \mathbf{CP} \bullet \mathbf{i} + \dot{b}_1$$

$$= (\Omega \times \mathbf{CP})_1 + \dot{b}_1 = (\Omega \times \mathbf{CP} + \dot{\mathbf{b}})_1$$

Observando que la derivada de **b** es la velocidad del origen C, y designando con $\mathbf{v}_P$ la velocidad del punto arbitrario P, se encuentra que

(24) $$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \Omega \times \mathbf{CP}$$

Este es un teorema bien conocido en la cinemática del cuerpo rígido. Ahora bien, en vista de que el origen C puede tomarse en cualquier punto del cuerpo rígido, podemos enunciar el teorema en los siguientes términos:

"La velocidad $\mathbf{v}_P$ de un punto arbitrario del cuerpo, P, es igual a la velocidad $\mathbf{v}_C$ de otro punto cualquiera del mismo, C, más el producto vectorial de la velocidad angular Ω del cuerpo y el vector separación **CP** que une C con P".

---

[1] Todo segmento determinado por dos puntos de un cuerpo rígido rota con la misma velocidad angular, la cual es la velocidad angular del cuerpo. En particular, los vectores básicos **i'**, **j'** y **k'** se mueven solidariamente con el sólido y comparten su velocidad angular Ω.

6.7 DERIVADAS TEMPORALES DE UN VECTOR RELATIVAS A DOS REFERENCIALES DISTINTOS

Sean C y C′ dos cuerpos rígidos en movimiento uno con respecto al otro. Veamos estos cuerpos como la materialización de sendos marcos de referencia, desde los cuales deseamos describir el movimiento de una partícula P. Fijemos el sistema cartesiano XYZ en C y el sistema X′Y′Z′ en C′ (Fig. 4).

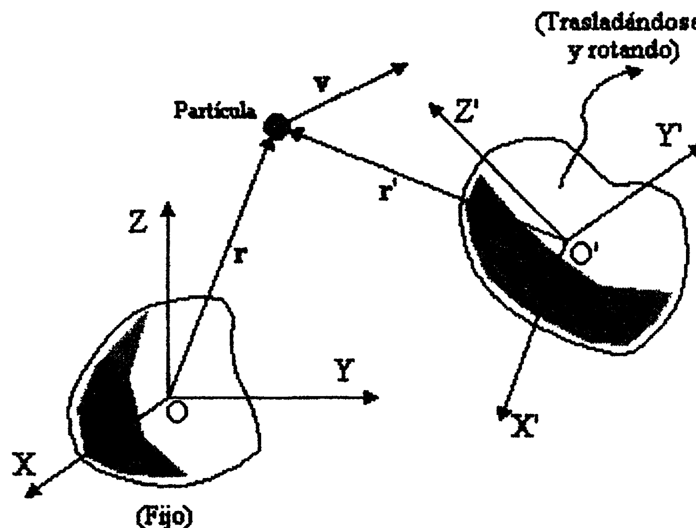


Fig. 4

Para facilitar la visualización, figurémonos que C está fijo y que C′ ejecuta un movimiento rígido general visto desde C. (Podríamos pensar que C es el Sol y C′ la Tierra). Supondremos que el origen O′ se mueve con velocidad $v_{O'}$, y que C′ rota con velocidad angular **Ω**, ambas con respecto a C. Demostraremos el siguiente teorema:

<u>Teorema</u>. Los ritmos de variación de un vector en ambos marcos de referencia C y C′, denotados con $\frac{d}{dt}$ y con $\frac{d'}{dt}$ respectivamente, obedecen la relación operacional

(25) $$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \Omega \times$$ (Aplicable a cualquier clase de *vector*)

<u>Demostración</u>. En la sección 6.5 hallamos que la derivada temporal de un vector V que solamente varía en *dirección*, viene dada por (Véase la ecuación (20))

$$\frac{dV}{dt} = \Omega \times V \qquad \text{si la magnitud V es constante}$$

Este vector solamente *rota*, y lo hace con velocidad angular **Ω**, respecto a XYZ.

Apliquemos esta ecuación a algunos vectores especiales que vistos desde XYZ solamente roten. Este es el caso de los vectores básicos **i'**, **j'** y **k'**, y además del vector de posición **C'** de cualquier partícula del cuerpo C' (Véase la Fig. 5).

Dado que los mencionados vectores se mueven rígidamente con el cuerpo móvil, comparten la velocidad angular de éste.

Por lo tanto, son válidas

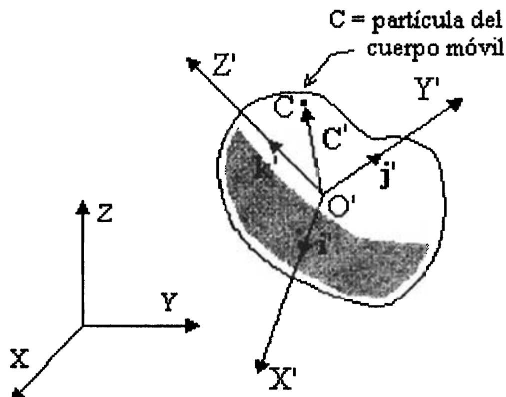


Fig. 5

(26) $$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}' \qquad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}' \qquad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}' \qquad \frac{d\mathbf{C}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{C}'$$

Usando las tres primeras de estas ecuaciones podemos ahora calcular la derivada temporal de un vector arbitrario V. Ponemos

(27) $$\mathbf{V} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V} = v_x'\,\mathbf{i}' + v_y'\,\mathbf{j}' + v_z'\,\mathbf{k}'$$

Saquemos la derivada del vector **V** según la expresión a la derecha:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dv_x'}{dt}\mathbf{i}' + v_x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dv_y'}{dt}\mathbf{j}' + v_y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dv_z'}{dt}\mathbf{k}' + v_z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

Sustituyendo de (22) las derivadas de los vectores básicos,

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dv_x'}{dt}\mathbf{i}' + v_x'(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{i}') + \frac{dv_y'}{dt}\mathbf{j}' + v_y'(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{j}') + \frac{dv_z'}{dt}\mathbf{k}' + v_z'(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{k}')$$

que escribimos en la forma

(28) $$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dv_x'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dv_y'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dv_z'}{dt}\mathbf{k}' + \boldsymbol{\Omega}\times(v_x'\,\mathbf{i}' + v_y'\,\mathbf{j}' + v_z'\,\mathbf{k}')$$

Ahora bien, los primeros tres términos de (24) forman la derivada del vector **V** *tal como se mediría desde el sistema* X'Y'Z' (o sea desde el marco de referencia C'). Para convencerse de ello basta examinar el caso en que v_x', v_y' y v_z' son constantes. Entonces el vector **V** es constante *visto desde* X'Y'Z', lo cual concuerda con el hecho de que la suma de

los tres primeros términos es cero en este caso. Denotaremos tal derivada temporal, medida desde X′Y′Z′, así:

$$(29) \qquad \frac{d'\mathbf{V}}{dt} \equiv \frac{dv'_x}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dv'_y}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dv'_z}{dt}\mathbf{k}'$$

Por otra parte, los últimos tres términos de (28) forman el vector $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}$. Se sigue que

$$(30) \qquad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d'\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} \qquad\qquad \text{QED}$$

Recordemos que la relación (30) puede aplicarse a *cualquier* vector **V**, no importa su naturaleza física.

Volviendo a la tarea de describir el movimiento de una partícula P con respecto a cada sistema, sean **r** y **r′** los vectores de posición respectivos (Véase la Fig. 4). Planteemos la relación

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{OO}'$$

y derivémosla con respecto al tiempo,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d(\mathbf{OO}')}{dt}$$

Tomemos en cuenta que las velocidades en cada sistema son $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ y $\mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt}$. Para relacionarlas transformemos el primer término del miembro derecho según (30):

$$(31) \qquad \mathbf{v} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}' + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_{O'}$$

donde $\mathbf{v}_{O'}$ es la velocidad del origen O′.

Volviendo a derivar (27) y aplicando de nuevo (26) obtendríamos la siguiente relación entre las aceleraciones:

$$(32) \qquad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\,\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{a}_{O'}$$

(Se usa $\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \frac{d'\mathbf{\Omega}}{dt}$). Las ecuaciones (31) y (32) son de utilidad en la descripción del movimiento relativamente a marcos de referencia acelerados o no-inerciales.

6.8 EL TENSOR DE INERCIA

El tensor de inercia surge de modo natural en relación con el momento angular de un sólido, por lo que primeramente recordaremos la definición de momento angular.

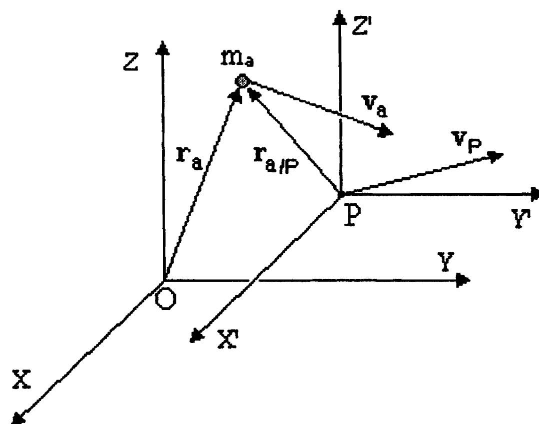


Fig. 6

En la Fig. 6 se ilustran dos sistemas de coordenadas fijos a sendos marcos de referencia. El sistema XYZ se imagina fijo en el espacio. El sistema X'Y'Z' se *traslada* con velocidad $\mathbf{v}_P$ con respecto al sistema fijo, esto es, los ejes de este sistema mantienen invariable su orientación en todo momento (digamos que sean paralelos a los ejes de XYZ).

Consideremos una partícula de masa m_a en movimiento. Se define el *momento angular de la partícula con respecto al punto móvil* P mediante la expresión

(33) $$\mathbf{l}^{(P)} = m_a\, \mathbf{r}_{a/P} \times \mathbf{v}_{a/P}$$

donde $\mathbf{r}_{a/P}$ es el vector de posición de la partícula "con respecto al punto P" (es decir, relativo al sistema móvil), y $\mathbf{v}_{a/P}$ es la velocidad de la partícula "a" relativa al marco de referencia anclado en el punto P.

Denotando los vectores de posición y las velocidades de los puntos P y "a", relativas al sistema XYZ, mediante $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{r}_P$, $\mathbf{v}_a$ y $\mathbf{v}_P$, tenemos alternativamente a (33),

(34) $$\mathbf{l}^{(P)} = m_a\, (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_P) \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_P)$$

El momento angular de un sistema de partículas se define aditivamente como la suma de los momentos angulares individuales de sus partículas,

(35) $$\mathbf{L}^{(P)} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{l}_a^{(P)} = \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_{a/P} \times \mathbf{v}_{a/P}$$

Consideremos en particular un conjunto de partículas que componen un cuerpo rígido, y hagamos coincidir el punto P con el centro de masa G del cuerpo. Entonces el momento angular del cuerpo con respecto a su centro de masa es

(36) $$\mathbf{L}^{(G)} = \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_{a/G} \times \mathbf{v}_{a/G}$$

Adelantemos unos resultados. El momento angular $\mathbf{L}^{(G)}$ está relacionado con la velocidad angular del cuerpo, $\mathbf{\Omega}$. Tal relación es lineal y homogénea y viene mediada por un tensor de segundo orden I_{ij} en la forma

(37) $$L_i^{(G)} = I_{ij}\, \Omega_j$$

El tensor I_{ij} se denomina el *tensor de inercia* del cuerpo. Éste depende solamente de la manera como está distribuída la masa a través del cuerpo y no de las propiedades cinemáticas del mismo.

Para obtener el tensor de inercia apliquemos la ecuación (24) para expresar la velocidad de la partícula representativa "a" en términos de la velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro de masa y el vector de posición de "a" con respecto a G, denotado por $\mathbf{R}_a$ (Fig. 7),

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_G + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_a$$

(con $\mathbf{R}_a \equiv \mathbf{r}_{a/G}$)

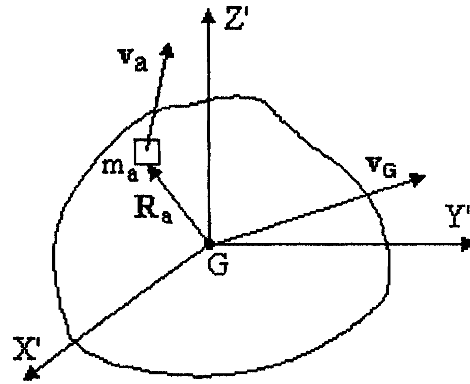


Fig. 7

De aquí sacamos

$$\mathbf{v}_{a/G} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_G = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_a$$

Sustituyendo en (36),

$$\mathbf{L}^{(G)} = \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_{a/G} \times \mathbf{v}_{a/G} = \sum m_a \mathbf{R}_a \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_a)$$

Desarrollando el triple producto vectorial,

$$\mathbf{L}^{(G)} = \sum m_a \, [(\mathbf{R}_a \bullet \mathbf{R}_a)\, \mathbf{\Omega} - (\mathbf{R}_a \bullet \mathbf{\Omega})\, \mathbf{R}_a]$$

Vamos a sacar la velocidad angular de "factor común". Pero antes debemos pasar a la notación tensorial. Note que el índice "a" numera partículas y que los índices i, j, k, etc. son índices tensoriales. Poniendo $(\mathbf{R}_a)_i \equiv X_{ai}$,

$$L_i^{(G)} = \sum m_a \,(X_{ak}\, X_{ak}\, \Omega_i - X_{aj}\, \Omega_j\, X_{ai}) =$$

$$= \sum m_a \,(X_{ak}\, X_{ak}\, \delta_{ij} - X_{ai}\, X_{aj})\, \Omega_j \equiv I_{ij}\, \Omega_j$$

Resulta así el tensor de inercia en la forma

(38) $$I_{ij} = \sum m_a \,(X_{ak}\, X_{ak}\, \delta_{ij} - X_{ai}\, X_{aj})$$

Si la distribución de masa se describe mediante una función continua ρ, la densidad de masa del cuerpo, tendremos, pasando a variables continuas

$$\mathbf{R}_a \to \mathbf{R} = (X, Y, Z) \qquad X_{ai} \to X_i \qquad m_a \to \rho\, dV \qquad \sum_{a=1}^{N} \to \int$$

$$I_{ij} = \int \rho \left(X_k X_k \delta_{ij} - X_i X_j \right) dV$$

(39) $$I_{ij} = \int \rho \left(R^2 \delta_{ij} - X_i X_j \right) dV$$

En notación matricial,

(40) $$(I_{ij}) = \begin{pmatrix} \int \rho \left(Y^2 + Z^2 \right) dV & -\int \rho XY\, dV & -\int \rho XZ\, dV \\ -\int \rho XY\, dV & \int \rho \left(X^2 + Z^2 \right) dV & -\int \rho YZ\, dV \\ -\int \rho XZ\, dV & -\int \rho YZ\, dV & \int \rho \left(X^2 + Y^2 \right) dV \end{pmatrix}$$

La matriz (I_{ij}) es simétrica. Los elementos de su diagonal principal se denominan los *momentos de inercia* del cuerpo con respecto a los ejes X, Y y Z, respectivamente; los elementos fuera de la diagonal se llaman los *productos de inercia* del cuerpo. La expresión (40) se escribe también en la forma

(41) $$(I_{ij}) = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

Como vemos, el tensor de inercia depende de las coordenadas (X, Y, Z) de las partículas del cuerpo y de la densidad de masa ρ del mismo. Definiendo matrices columna para los vectores $\mathbf{L}^{(G)}$ y $\mathbf{\Omega}$, y una matriz 3 × 3 para el tensor de inercia, tenemos en forma matricial

(42) $$\mathsf{L}^{(G)} = \mathsf{I}\,\Omega$$

Momento de inercia con respecto a un eje

El tensor de inercia (41) es una cantidad asociada con un sistema de ejes cuyo origen es el centro de masa G. Conviene introducir ahora una cantidad escalar asociada con un sólo eje E. En la Fig. 8 sea E un eje que pasa por el centro de masa G. Se define el *momento de inercia del cuerpo con respecto al eje* E mediante

(43) $$I_E = \int \xi^2 dm = \int \rho \xi^2 dV$$

Si se conoce el tensor de inercia, se puede calcular el momento de inercia I_E en la forma

(44) $$I_E = I_{ij}\, e_i\, e_j$$

donde **e** es el vector unitario a lo largo del eje E. La expresión (44) se evalúa convenientemente como un producto de matrices,

(45) $$I_E = \tilde{\mathsf{e}}\mathsf{I}\mathsf{e}$$

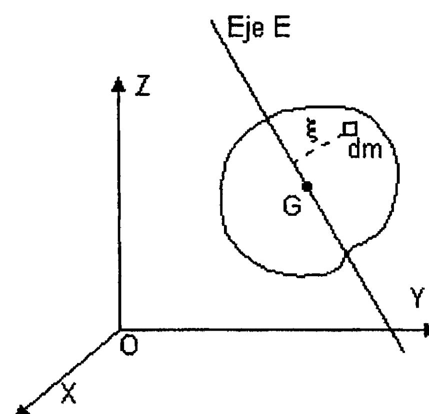


Fig. 8

Teorema de Steiner

El tensor de inercia obtenido anteriormente está referido al centro de masa G, esto es, el vector **R** (ó X_i) que aparece en (35) se toma desde el centro de masa G. En muchas aplicaciones conviene referirlo a otro punto distinto C (Fig. 9).

Nuestra tarea es transformar la expresión

(46) $$I_{ij}^{G} = \int \rho \left(R^2 \delta_{ij} - X_i X_j\right) dV$$

a otra, denotada con I_{ij}^{C}, donde aparezcan en lugar de R, X_i y X_j las coordenadas relativas a un origen en C.

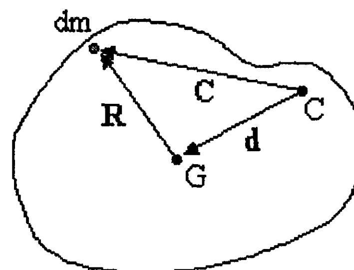


Fig. 9

En la Fig. 9 notamos la relación

$$\mathbf{R} = \mathbf{C} - \mathbf{d} \qquad (\mathbf{d} \text{ constante})$$

$$R^2 = |\mathbf{C} - \mathbf{d}|^2 = (\mathbf{C} - \mathbf{d}) \bullet (\mathbf{C} - \mathbf{d}) = C^2 - 2\, C_k\, d_k + d^2$$

$$X_i X_j = (C_i - d_i)(C_j - d_j) = C_i C_j - C_i\, d_j - d_i\, C_j + d_i\, d_j$$

Sustituyamos en la integral (46),

$$I_{ij}^G = \int \rho \left[(C^2 - 2d_k C_k + d^2)\delta_{ij} + C_i C_j - d_j C_i - d_i C_j + d_i d_j \right] dV$$

Tomando en cuenta que la posición del centro de masa G relativa al origen en C es el vector de posición **d**, o sea $Md_i = \int \rho C_i dV$, tenemos

$$\int \rho(-2d_k C_k)\delta_{ij} dV = -2d_k \delta_{ij} \int \rho C_k dV = -2d_k \delta_{ij} \cdot Md_k = -2Md^2 \delta_{ij}$$

$$\int \rho(-d_j C_i) dV = -d_j \int \rho C_i dV = -Md_j d_i = -Md_i d_j$$

$$\int \rho(-d_i C_j) dV = -d_i \int \rho C_j dV = -Md_i d_j$$

$$\int \rho \left(d^2 \delta_{ij} - d_i d_j \right) dV = \left(d^2 \delta_{ij} - d_i d_j \right) \int \rho dV = M \left(d^2 \delta_{ij} - d_i d_j \right)$$

Arreglando términos arribamos al Teorema de Steiner en la forma

(47) $$I_{ij}^C = I_{ij}^G + M \left(d^2 \delta_{ij} - d_i d_j \right)$$

donde

$$I_{ij}^C \equiv \int \rho \left(C^2 \delta_{ij} - C_i C_j \right) dV$$

es el tensor de inercia referido al punto C. El segundo término de (47) sería el tensor de inercia referido a C de una partícula que tuviese la masa total del cuerpo y que estuviese situada en el centro de masa.

En los Apéndices I y II se introducen los tensores de deformaciones y de esfuerzos, usados en la Mecánica de Sólidos.

Ejemplo 1. Consideremos un anillo delgado y homogéneo, de radio r y masa M. Coloquémoslo con su centro en el origen O y su plano coincidente con el plano XY (Fig. 10). El momento de inercia del anillo con respecto al eje Z es $I_z = Mr^2$, y con respecto a los otros ejes son $I_x = I_y = (1/2)\, Ma^2$. Por otra parte, los productos de inercia son todos nulos, así que el tensor de inercia del anillo, referido al origen O, es

$$\text{(48)} \qquad \mathsf{I} = Mr^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deseamos obtener el tensor de inercia del anillo en la situación en que su plano está oblicuo con respecto a los ejes XYZ (Fig. 11). Digamos que este plano se defina mediante el vector unitario normal **u**.

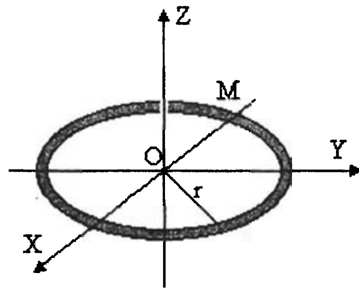


Fig. 10

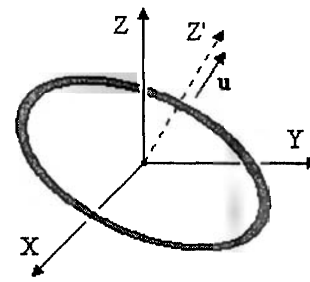


Fig. 11

Podemos hacerlo con el siguiente método. Definiendo el sistema X′Y′Z′ de modo que el eje Z′ esté a lo largo de **u** y los ejes X′ y Y′ en el plano del anillo, como en la Fig. 11, tendremos que el tensor de inercia relativo a estos ejes corresponde a la matriz (48). Escribamos esta matriz en notación tensorial:

$$I'_{ij} = \frac{1}{2} Mr^2(\delta_{ij} + \delta_i^{(3)}\delta_j^{(3)}) \qquad \left(\text{o bien } I'_{mn} = \frac{1}{2} Mr^2(\delta_{mn} + \delta_m^{(3)}\delta_n^{(3)})\right)$$

Como se advierte, el problema consiste en obtener el tensor I_{ij} relativo al sistema XYZ. Entonces, transformemos I'_{ij} de acuerdo con la ley $I_{ij} = a_{mi}\, a_{nj}\, I'_{mn}$. La delta de Kronecker se transforma en sí misma y el producto $\delta_m^{(3)}\delta_n^{(3)}$ se transforma a

$$a_{mi}\, a_{nj}\, \delta_m^{(3)}\delta_n^{(3)} = a_{3i}\, a_{3j}$$

Pero $a_{3i} = (\mathbf{k}')_i = u_i$, de tal manera que

$$\text{(49)} \qquad I_{ij} = \frac{1}{2} Mr^2(\delta_{ij} + u_i\, u_j)$$

Problemas

1. Obtener el tensor de rotación correspondiente a una rotación especificada por el eje de rotación $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ y el ángulo de rotación $\theta = 120°$. Aplicar esta rotación al vector básico $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$.

2. Dado el tensor de rotación R_{ij} en la forma

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

obtener el eje de rotación **e** y el ángulo de rotación θ.

3. Demostrar a partir de (4) que el tensor de rotación cumple la relación

$$R_{ij}\, R_{kj} = \delta_{ik}$$

4. Demostrar que dos rotaciones infinitesimales $R_{ij}(\mathbf{e}_1, d\theta_1)$ y $R_{ij}(\mathbf{e}_2, d\theta_2)$ aplicadas en sucesión sobre un mismo vector **A** resultan en

$$d\mathbf{A} = (d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2) \times \mathbf{A}$$

Es decir, las rotaciones infinitesimales se componen vectorialmente.
Sugerencia: desprecie productos de $d\theta$'s.

5. Demostrar la ecuación (28).

6. Obtener la expresión $I_E = I_{ij}\, e_i\, e_j$ que da el momento de inercia con respecto a un eje **e**, a partir de la fórmula del tensor de inercia, ecuación (35).

7. Obtener a partir del Teorema de Steiner (ecuación (43)) el teorema de los ejes paralelos $I_E = I_G + Md^2$, en el que I_E e I_G son los momentos de inercia con respecto a sendos ejes paralelos, uno arbitrario y el otro a través del centro de masa; M es la masa del cuerpo y "d" es la distancia entre los ejes E y G.

8. Considere un cuerpo rígido que se mueve de tal manera que su centro de masa G permanece fijo. Podemos imaginar el movimiento como una sucesión de rotaciones infinitesimales en torno a un eje que pasa por G y cuya orientación varía con el tiempo.

La velocidad de una partícula cualquiera del cuerpo, de masa m_a y radiovector $\mathbf{R}_a$ con respecto a G, viene dada por

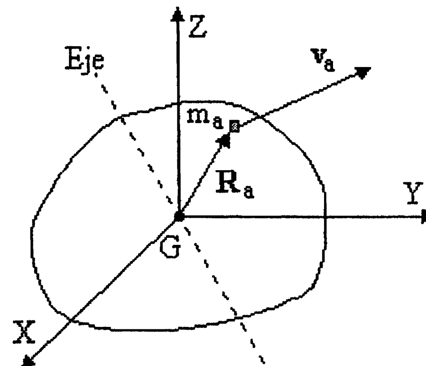


Fig. Probl. 8

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_a$$

donde $\mathbf{\Omega}$ es la velocidad angular instantánea. La energía cinética del cuerpo es

$$K = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 = \frac{1}{2} \sum_a m_a \, (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_a) \bullet (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_a)$$

Desarrolle esta expresión y demuestre que

$$K = \frac{1}{2} I_{ij} \, \Omega_i \, \Omega_j = \frac{1}{2} L_i \, \Omega_i = \frac{1}{2} \mathbf{L} \bullet \mathbf{\Omega}$$

donde I_{ij} es el tensor de inercia referido al centro de masa y L_i es el momento angular con respecto al centro de masa.

9. Demostrar que el momento de inercia de un anillo homogéneo de radio r y masa M, con respecto a cualquier eje E que pasa por un punto P situado sobre el eje de simetría perpendicular a una distancia $r/\sqrt{2}$ por debajo de su centro de masa G, vale

$$I_E = Mr^2$$

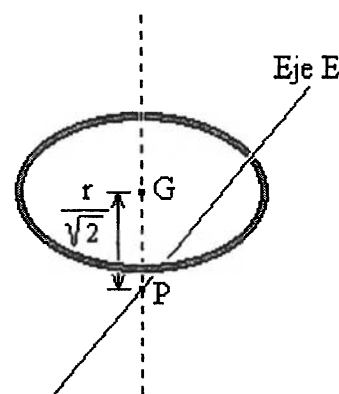


Fig. Probl. 9

Sugerencia. La expresión (49) está referida al centro G del anillo. Use el teorema de Steiner para referirla al punto P. Luego calcule I_E con la fórmula (44).

CAPÍTULO 7	OPERADORES DIFERENCIALES

Las leyes físicas que rigen el comportamiento mecánico y termodinámico de los medios continuos se pueden formular como ecuaciones diferenciales parciales. Lo mismo podemos decir sobre las leyes de Maxwell del electromagnetismo y las de la mecánica cuántica en la representación de Schrödinger.

En estas ecuaciones diferenciales figuran ciertas combinaciones especiales de las derivadas de los campos físicos, las cuales conocemos con los nombres de *gradiente*, *divergencia*, *rotacional* y *laplaciano*. El estudio de estos operadores diferenciales es el objetivo del presente capítulo.

7.1 GRADIENTE

Consideremos el siguiente problema: dado un campo tensorial $T_{ij\ldots n}(x, y, z)$ y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de su dominio, ¿cuál es la tasa de variación del campo con la distancia medida lo largo de una dirección cualquiera del infinito de direcciones que emanan de P? (Fig.1).

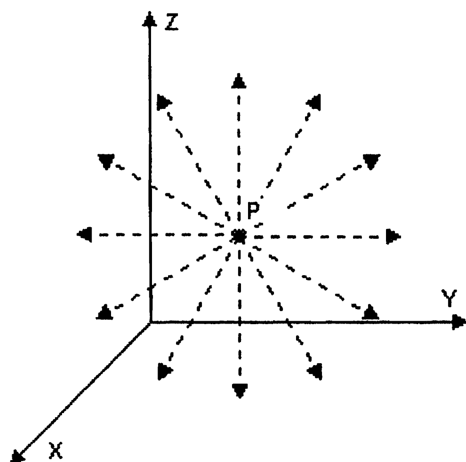


Fig. 1

La respuesta la proporciona el cálculo diferencial. Consideremos por simplicidad un campo escalar $\varphi(x, y, z)$ y denotemos el valor de φ en el punto P mediante cualquiera de las notaciones

$$\varphi(x_0,y_0,z_0) \qquad \varphi(\mathbf{r}_0) \qquad \varphi(P)$$

donde $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$. La diferencial total $d\varphi$, evaluada en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$, es igual al cambio o variación de φ en un desplazamiento desde P hasta un punto vecino $Q(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$,

(1) $$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_P dz$$

Formalmente pondremos

$$(2)\qquad d\varphi = \begin{cases} \varphi(Q) - \varphi(P) \\ \varphi(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) - \varphi(x, y, z) \\ \varphi(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0) \end{cases}$$

Aquí el vector **dr** = **PQ** = dx **i** + dy **j** + dz **k** especifica la magnitud y dirección del desplazamiento efectuado desde P.

Observemos que (1) puede escribirse como un producto escalar, a saber,

$$(3)\qquad d\varphi = (\nabla\varphi)_P \bullet d\mathbf{r}$$

donde

$$(4)\qquad \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{k}$$

es una función vectorial de la posición denominada el *gradiente* de la función φ. En (3) aparece el gradiente evaluado en el punto P; teniendo esto presente escribiremos la diferencial como función de (x, y, z) y (dx, dy, dz), en la forma

$$(5)\qquad d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \nabla\varphi \bullet d\mathbf{r}$$

Podemos responder ya la pregunta formulada al principio de este apartado.

Para calcular la tasa de variación espacial de φ a lo largo de la dirección especificada por un vector unitario **û**, hay que escoger dx, dy y dz de tal manera que **dr** apunte hacia tal dirección **û** (Fig. 2). Entonces $dx \propto u_x$, $dy \propto u_y$ y $dz \propto u_z$, o bien

$$(6)\qquad d\mathbf{r} \equiv ds\,\hat{\mathbf{u}} \qquad (ds \equiv |d\mathbf{r}|)$$

El cambio buscado será, de (3),

$$d\varphi = \nabla\varphi \bullet (ds\,\hat{\mathbf{u}}) = \nabla\varphi \bullet \hat{\mathbf{u}}\,ds$$

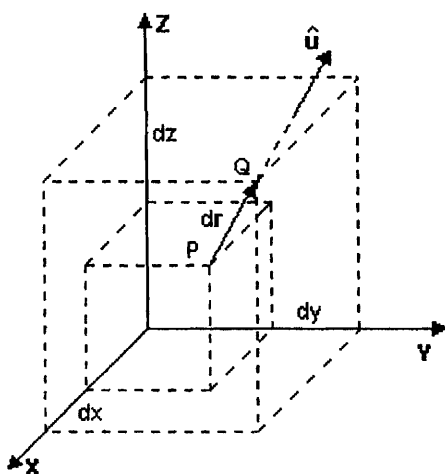


Fig. 2

Por lo tanto, la variación de φ por unidad de longitud en la dirección **û**, denotada por $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ y denominada la *derivada direccional* de φ, en la dirección de **û** es

(7) $$\frac{d\varphi}{ds} = \nabla\varphi \bullet \hat{\mathbf{u}} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

("ds" medido a lo largo de **û**)
En particular, las tasas de variación espacial de φ a lo largo de las direcciones de los ejes coordenados X, Y y Z son las familiares derivadas parciales

$$\nabla\varphi \bullet \mathbf{i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \nabla\varphi \bullet \mathbf{j} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad y \qquad \nabla\varphi \bullet \mathbf{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Definición. El *gradiente* de la función φ, evaluado en el punto P, es aquel vector con la propiedad de que su componente a lo largo de cualquier dirección **û** es igual a la derivada direccional de la función φ en esa dirección, evaluada en P:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \nabla\varphi \bullet \hat{\mathbf{u}} \;\; = \text{componente de } \nabla\varphi \text{ en la dirección } \hat{\mathbf{u}}$$

Ejemplo 1. Apliquemos la definición del gradiente para hallar sus componentes en la base esférica $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$.

Consideraremos tres pequeños desplazamientos desde el punto general P de coordenadas esféricas P(r, θ, ϕ) hasta sendos puntos vecinos Q, a los que llegamos variando cada vez solamente una de las coordenadas,

$$P(r, \theta, \phi) \quad \rightarrow \quad Q(r + dr, \theta, \phi)$$

$$P(r, \theta, \phi) \quad \rightarrow \quad Q(r, \theta + d\theta, \phi)$$

$$P(r, \theta, \phi) \quad \rightarrow \quad Q(r, \theta, \phi + d\phi)$$

Denotaremos estos desplazamientos con $(\delta\mathbf{r})_r$, $(\delta\mathbf{r})_\theta$ y $(\delta\mathbf{r})_\phi$, respectivamente, y los cambios asociados de la función φ con $(\delta\varphi)_r$, $(\delta\varphi)_\theta$ y $(\delta\varphi)_\phi$. En la Fig. 3 vemos el primero de ellos, que podemos escribir $(\delta\mathbf{r})_r = dr\, \mathbf{e}_r$. El cambio correspondiente de la función φ es

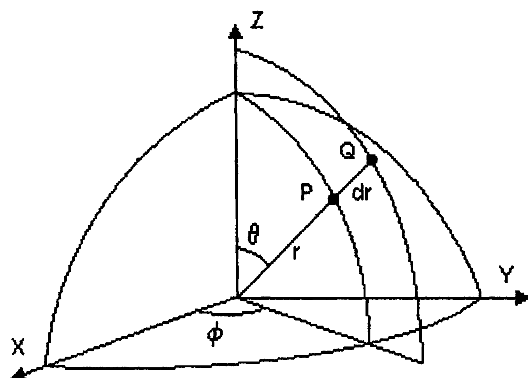


Fig. 3

$$(\delta\varphi)_r = \varphi(r + dr, \theta, \phi) - \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr$$

Entonces el cambio por unidad de longitud en la dirección $\mathbf{e}_r$ es

$$\frac{(\delta\varphi)_r}{|(\delta\mathbf{r})_r|} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial r}dr}{dr} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

Esta es la componente radial del vector gradiente en coordenadas esféricas.

Procediendo análogamente, habida cuenta de las relaciones

$$(\delta\mathbf{r})_\theta = r\, d\theta\, \mathbf{e}_\theta \qquad (\delta\mathbf{r})_\phi = r \text{ sen } \theta\, \mathbf{e}_\phi$$

$$(\delta\varphi)_\theta = \varphi(r, \theta + d\theta, \phi) - \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}dr$$

$$(\delta\varphi)_\phi = \varphi(r, \theta, \phi + d\phi) - \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}d\phi$$

obtenemos (Figs. 4 y 5)

$$\frac{(\delta\varphi)_\theta}{|(\delta\mathbf{r})_\theta|} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta}{rd\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \qquad \text{y} \qquad \frac{(\delta\varphi)_\phi}{|(\delta\mathbf{r})_\phi|} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}d\phi}{r\,\text{sen}\theta\, d\phi} = \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}$$

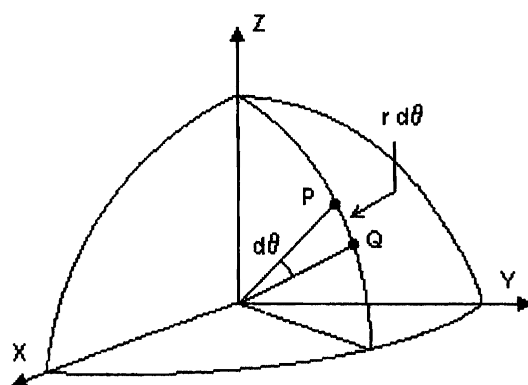


Fig. 4

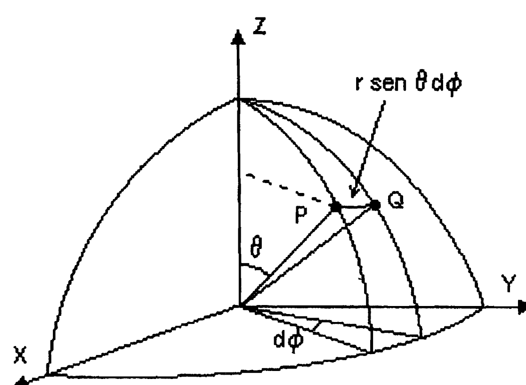


Fig. 5

La expresión del gradiente queda

$$(8) \qquad \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$

Nota. El desplazamiento general se compone de tres desplazamientos parciales,

$$\mathbf{dr} = (\delta\mathbf{r})_r + (\delta\mathbf{r})_\theta + (\delta\mathbf{r})_\phi = \mathrm{dr}\ \mathbf{e}_r + \mathrm{r\ d}\theta\ \mathbf{e}_\theta + \mathrm{r\ sen}\ \theta\ \mathbf{e}_\phi$$

El producto escalar de los vectores $\nabla\phi$ y **dr** reproduce la diferencial total de la función,

$$d\varphi = \nabla\varphi \bullet \mathbf{dr} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(rd\theta) + \frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}(r\mathrm{sen}\theta) = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}d\phi.$$

7.2 PROPIEDADES DEL GRADIENTE

Conociendo el gradiente de una función ψ podemos calcular la tasa de variación espacial de la función hacia cualquier dirección. Surge naturalmente la pregunta: ¿hacia qué dirección desde un punto dado P varía la función al máximo? En otros términos, ¿hacia dónde hay que dirigir **dr** de modo que la consiguiente variación $d\psi$ sea máxima?

Procedamos a averiguar cuál es esta **dr**.

Sea $\nabla\psi$ el gradiente evaluado en P. Escribamos el producto escalar $d\psi = \nabla\psi \bullet \mathbf{dr}$ en la forma

$$d\psi = |\,\psi\,|\ ds \cos\alpha$$

donde ds es la longitud de **dr** y α es el ángulo entre $\nabla\psi$ y **dr** (Fig. 6). Entonces

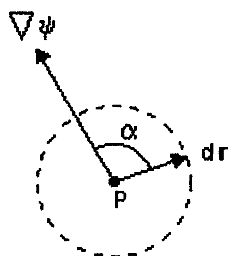


Fig. 6

$$(9) \qquad \frac{d\psi}{ds} = |\nabla\psi|\cos\alpha$$

El gradiente es aquí un vector fijo y α es la única variable. La derivada (9) es máxima cuando $\alpha = 0°$ y mínima cuando $\alpha = 180°$, es decir, cuando **dr** está respectivamente en la misma dirección que el gradiente o en dirección opuesta a éste.

La dirección del gradiente de una función en un punto es la dirección de máximo incremento de la función en ese punto. La dirección opuesta a la del gradiente es la de máximo decrecimiento.

Mencionemos unos ejemplos ilustrativos de lo anterior:

- El campo electrostático **E** está en la dirección de máximo decrecimiento del potencial electrostático ϕ,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

- El vector de flujo de calor **J** en un sólido apunta hacia donde la temperatura T disminuye al máximo,

$$\mathbf{J} = -\lambda\,\nabla T \qquad \lambda \text{ es la conductividad térmica } (>0)$$

- La fuerza de compresión hidrostática **F** que experimenta un elemento de volumen ΔV en un fluido va en la dirección de mayor a menor presión "p",

$$\mathbf{F} = -\Delta V\cdot\nabla p$$

Podemos formarnos una representación gráfica de las variaciones de toda función escalar de dos variables de posición, $\psi(x, y)$, en la vecindad de un punto P, del siguiente modo. En la Fig. 7, P es un punto del dominio de ψ y la flecha larga representa el gradiente $\nabla\psi$ en P. Con centro en P tracemos una circunferencia de radio "ds" y otras dos circunferencias de diámetro "ds", inscritas como se muestra. El segmento "dξ" determinado por la intersección con la circunferencia es igual a $d\xi = ds\cos\alpha$. Comparando con la diferencial de ψ, dada por

$$d\psi = |\nabla\psi|\,ds\cos\alpha$$

tenemos para la variación de ψ a lo largo de **u**:

$$(10) \qquad d\psi \propto d\xi$$

$d\psi$ es cero en dirección del diámetro punteado, y cambia de signo en el otro círculo.

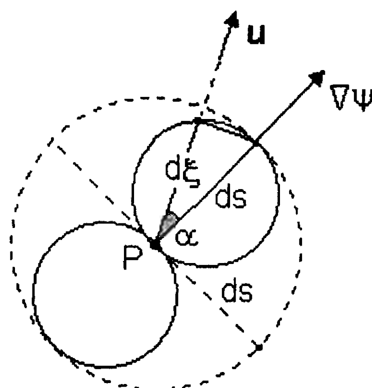


Fig. 7

La gráfica de una función o campo escalar da una idea global indirecta de las variaciones de la función, o sea de su campo de gradientes. Un campo bidimensional función de la posición en un plano, $\psi = f(x, y)$, puede representarse gráficamente en un espacio cartesiano abstracto tridimensional $XY\Psi$ en el que las coordenadas de los puntos se expresan en la forma (x, y, ψ). En este espacio la ecuación $\psi = f(x, y)$ o su forma implícita $F(x, y, \psi) = 0$ representa una superficie (Fig. 8). El dominio del campo es alguna región del

plano XY, y el valor del campo ψ en el punto (x, y) se representa por la "altura" sobre el plano XY.

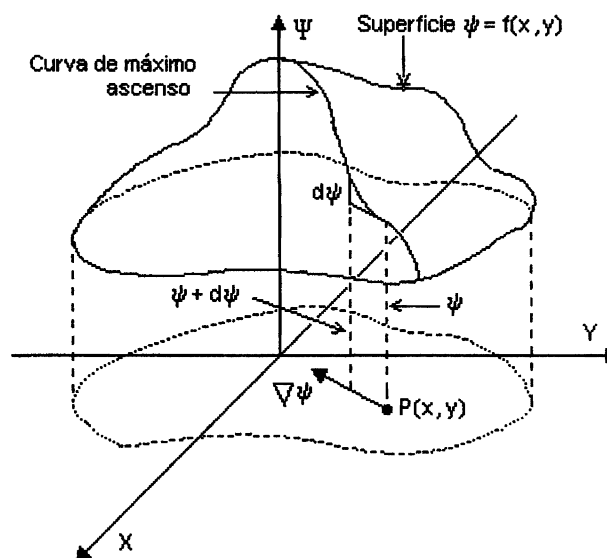


Fig. 8

El gradiente de ψ es un vector en el plano XY,

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j}$$

Para todo punto del dominio de ψ, la gráfica nos permite visualizar cuál es la dirección de máximo crecimiento de la función, o sea el campo de gradientes. Se obtiene una mejor visualización usando una representación gráfica alternativa de la función ψ, que se vale de las llamadas *curvas de nivel*. Las curvas de nivel forman una familia de curvas en el plano XY. Cada curva es el lugar geométrico de los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación

$$f(x, y) = c \qquad \text{o sea} \qquad \psi = c$$

donde c es una constante paramétrica. Una serie de valores de c, que conviene tomar igualmente espaciados, genera la familia.

En la Fig. 9 se muestra esquemáticamente la familia de curvas de nivel que correspondería a la superficie acampanada representada en la Fig. 8.

Para un campo tridimensional $\psi = f(x, y, z)$ no podemos hacer una gráfica análoga a la Fig. 8 pues el espacio cartesiano requerido es de cuatro dimensiones XYZΨ, pero sí podemos utilizar la segunda representación, si bien ya no hablaríamos de curvas de nivel, sino de *superficies de nivel* (también conocidas como *superficies equipotenciales*) de la forma f(x, y, z) = c.

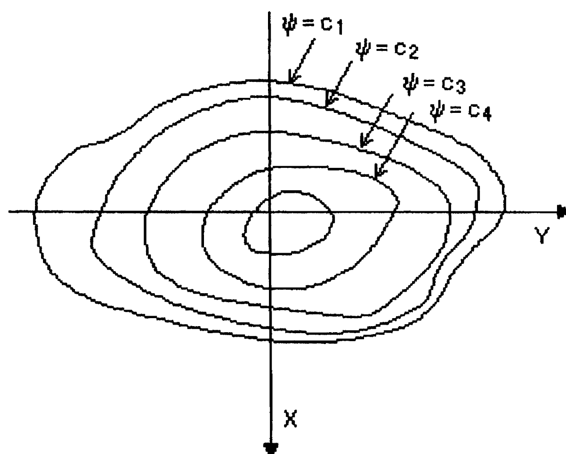


Fig. 9

En relación con las curvas de nivel citemos un par de propiedades del gradiente.

- El gradiente en el punto P(x, y) es perpendicular a la curva de nivel que pasa por P.
- La magnitud del gradiente es inversamente proporcional (aproximadamente) a la distancia mínima local entre curvas adyacentes. En otros términos, si las curvas de la familia f(x, y) = c corresponden a valores de "c" igualmente espaciados, la magnitud del gradiente es tanto mayor cuanto más densas (próximas) estén las curvas de nivel.

Para demostrar la primera propiedad, consideremos un pequeño desplazamiento PQ = $\mathbf{dr}$ que nos lleve desde cierto punto P sobre la curva de nivel $\psi = c$ hasta otro punto Q *sobre la misma curva* (Fig. 10). Entonces, por construcción, $\mathbf{dr}$ es tangente a la curva de nivel y además $d\psi = 0$ puesto que $\psi(Q) = \psi(P) = c$. Por otra parte, de la relación $d\psi = \nabla\psi \bullet \mathbf{dr}$ junto con $d\psi = 0$ se tiene que $\nabla\psi \bullet \mathbf{dr} = 0$, es decir, que $\nabla\psi$ es perpendicular a $\mathbf{dr}$ y con ello a la curva de nivel en P, QED.

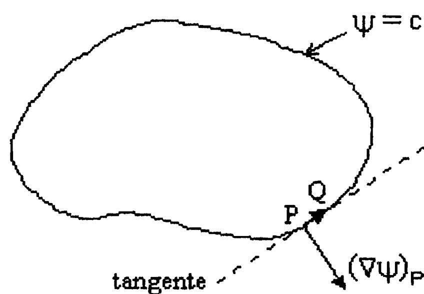


Fig. 10

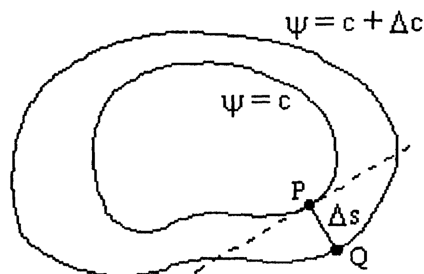


Fig. 11

En cuanto a la segunda propiedad, desplacémonos desde el punto P perpendicularmente a la curva de nivel que contiene a P (o sea $\psi = c$) hasta el punto Q perteneciente a la curva de nivel $\psi = c + \Delta c$ (Fig. 11). Puesto que **PQ** está ya en la dirección del gradiente en P, la magnitud de éste se evalúa dividiendo la variación de ψ por la distancia, o sea

(11) $$|\nabla\psi| = \frac{d\psi}{ds} \approx \frac{\Delta c}{\Delta s} \qquad \text{QED}$$

Estas propiedades se pueden extender a campos escalares $\psi(x, y, z)$ tridimensionales. El gradiente en este caso es un vector perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por el punto considerado, y la densidad de superficies da una idea de la magnitud del gradiente.

7.3 EL OPERADOR DIFERENCIAL "del" O "nabla" ∇

Consideremos una función de la posición (x, y, z) ó (x_1,x_2,x_3). Usando la regla de la cadena y la relación de transformación

$$x_k = a_{ik}\, x_i' + b_k \qquad \text{(que nos da } \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = a_{ik}\text{)}$$

tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}(\text{función}) = \frac{\partial(\text{función})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = \frac{\partial(\text{función})}{\partial x_k} \cdot a_{ik} = a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}(\text{función})$$

o sea, con un significado evidente,

(12) $$\frac{\partial}{\partial x_i'} = a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Esta relación expresa que la terna de operadores diferenciales $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ posee las propiedades de transformación de un vector ordinario. Recibe el nombre de operador "gradiente" o "del" o "nabla" y se denota simbólicamente con "∇",

(13) $$(\nabla)_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \nabla \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

La yuxtaposición (o "producto") del operador ∇ y una función ψ, es decir el símbolo $\nabla\psi$ que ya utilizamos para el gradiente de ψ, se interpreta consistentemente como la operación de sacar las derivadas parciales de ψ en la forma

$$(\nabla)_i \psi \equiv (\nabla\psi)_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \qquad \nabla\psi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi = \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Al aplicar (como producto externo) el operador nabla sobre un tensor de orden n se genera otro tensor de orden n + 1. Por ejemplo, si T_{ij} es un tensor de orden 2, entonces $\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ij}$ es un tensor de orden 3.

El *gradiente de un campo vectorial* **A**(x, y, z) se define como el tensor de segundo orden

(14) $$G_{ij} = \nabla_i A_j = \frac{\partial}{\partial x_i} A_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

Análogamente a lo que sucede con un campo escalar ψ, para el cual $d\psi = \mathbf{dr} \bullet \nabla\psi$, el gradiente de un campo vectorial figura en la diferencial total del campo,

$$d\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} dz = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{A}$$

o sea,

(15) $$d\mathbf{A} = (\mathbf{dr} \bullet \nabla)\mathbf{A} \qquad \text{o} \qquad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} dx_j = G_{ji} dx_j$$

En general, el operador "d" que produce la diferencial total de un campo tensorial función de la posición (x, y, z) es

(16) $$d = dx_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \mathbf{dr} \bullet \nabla$$

Para un escalar, $d = \mathbf{dr} \bullet \nabla$. Para un vector son necesarios los paréntesis, $d = (\mathbf{dr} \bullet \nabla)$.

7.4 El desarrollo de Taylor en tres variables

El desarrollo en serie de Taylor de una función escalar de la posición es

$$\phi(x+h, y+k, z+l) = \phi(x,y,z) + h\frac{\partial\phi}{\partial x} + k\frac{\partial\phi}{\partial y} + l\frac{\partial\phi}{\partial z} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + k^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + l^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + 2hk\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + 2hl\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} + 2kl\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right) + \ldots$$

En notación vectorial,

(17) $$\phi(\mathbf{r}+\in) = \phi(\mathbf{r}) + \in \bullet \nabla\phi + \frac{1}{2}(\in \bullet \nabla)^2\phi + \ldots$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es el vector de posición variable y $\in = (h, k, l)$ es su “incremento”.

Para un campo vectorial de la posición, $\mathbf{V}(\mathbf{r})$,

(18) $$\mathbf{V}(\mathbf{r}+\in) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) + (\in \bullet \nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{2}(\in \bullet \nabla)^2\mathbf{V} + \ldots$$

Para un campo tensorial de segundo orden, $T_{ij}(\mathbf{r})$,

(19) $$T_{ij}(\mathbf{r}+\in) = T_{ij}(\mathbf{r}) + \epsilon_m \frac{\partial}{\partial x_m}T_{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_m\epsilon_n \frac{\partial}{\partial x_m \partial x_n}T_{ij} + \ldots$$

La “aproximación a orden n” de un campo evaluado en $\mathbf{r}+\in$ consiste en truncar el desarrollo de Taylor, excluyendo términos de orden mayor que “n” en los incrementos h, k, l. En la física matemática es especialmente importante el desarrollo a primer orden o *aproximación lineal*,

(20) $$\phi(\mathbf{r}+\in) \approx \phi(\mathbf{r}) + (\in \bullet \nabla)\phi$$

(21) $$\mathbf{V}(\mathbf{r}+\in) \approx \mathbf{V}(\mathbf{r}) + (\in \bullet \nabla)\mathbf{V}$$

(22) $$T_{ij}(\mathbf{r}+\in) \approx T_{ij}(\mathbf{r}) + \epsilon_m \frac{\partial}{\partial x_m}T_{ij}$$

El operador $\in \bullet \nabla = \epsilon_m \frac{\partial}{\partial x_m}$ es el que produce el término lineal.

7.5 FÓRMULAS RELATIVAS AL GRADIENTE

Reunimos aquí algunas fórmulas útiles relacionadas con el gradiente.

(a) $$\nabla(\phi\psi) = \psi\,\nabla\phi + \phi\,\nabla\psi$$

(b) $$\nabla\phi^{n} = n\,\phi^{n-1}\,\nabla\phi$$

(c) $$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\psi^{2}}$$

(d) Para una función de la distancia al origen $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\nabla\phi(r) = \frac{d\phi}{dr}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} = \phi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Ejemplos:

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \nabla r^2 = 2\mathbf{r} \qquad \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \qquad \nabla\frac{1}{r^2} = -\frac{2\mathbf{r}}{r^4}$$

$$\nabla \ln(r) = \frac{\mathbf{r}}{r^2} \qquad \nabla \mathrm{sen}(kr) = \frac{k\cos(kr)}{r}\mathbf{r} \qquad \nabla e^{-ár} = -\frac{áe^{-ár}}{r}\mathbf{r}$$

(e) Si **a** es un vector constante,

(23) $$\nabla(\mathbf{a} \bullet \mathbf{r}) = \mathbf{a}$$

(Esta regla corresponde en una dimensión a la relación $\frac{d(ax)}{dx} = a$. Demostrémosla mediante el método tensorial:

$$[\nabla(\mathbf{a} \bullet \mathbf{r})]_i = \frac{\partial(a_k x_k)}{\partial x_i} = a_k\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = a_k ä_{ki} = a_i = (\mathbf{a})_i$$

(24) $$(\mathbf{a} \bullet \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a}$$

Demostración:

$$[(\mathbf{a} \bullet \nabla)\mathbf{r}]_i = \left(a_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)x_i = a_k\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = a_k ä_{ik} = a_i = (\mathbf{a})_i$$

Ejemplo 2. Calcular el gradiente de la forma bilineal $f = C_{ij}\, x_i\, x_j$, donde C_{ij} es un tensor constante.

$$[\nabla f]_k = \frac{\partial}{\partial x_k}(C_{ij} x_i x_j) = C_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + C_{ij} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} =$$

$$= C_{ij}\, \delta_{ik}\, x_j + C_{ij}\, x_i\, \delta_{jk} = C_{kj}\, x_j + C_{ik}\, x_i$$

Cambiando en el segundo término el índice mudo "i" por el índice "j",

$$[\nabla f]_k = C_{kj}\, x_j + C_{jk}\, x_j = (C_{jk} + C_{kj})\, x_j$$

Ejemplo 3. Calcular el gradiente del escalar $\xi = (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$, donde **a** y **b** son vectores constantes.

Escribamos ξ en notación tensorial y derivémosla con respecto a x_i,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\in_{mnp}\, a_n x_p \cdot \in_{mqr}\, b_q x_r\right) =$$

$$= \in_{mnp}\, a_n \frac{\partial x_p}{\partial x_i} \cdot \in_{mqr}\, b_q x_r + \in_{mnp}\, a_n x_p \cdot \in_{mqr}\, b_q \frac{\partial x_r}{\partial x_i}$$

$$= \in_{mnp}\, a_n\, \delta_{pi} \in_{mqr}\, b_q\, x_r + \in_{mnp}\, a_n\, x_p \in_{mqr}\, b_q\, \delta_{ri} =$$

$$= \in_{mni}\, a_n \in_{mqr}\, b_q\, x_r + \in_{mnp}\, a_n\, x_p \in_{mqi}\, b_q$$

Escribamos el resultado en la notación simbólica. En el primer término de la última ecuación tenemos la combinación $\in_{mqr}\, b_q\, x_r$, que se puede poner igual a $(\mathbf{b} \times \mathbf{r})_m$, y en el segundo término la combinación $\in_{mnp}\, a_n\, x_p$ es igual a $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})_m$. Entonces,

$$[\nabla \xi]_i = \in_{mni}\, a_n\, (\mathbf{b} \times \mathbf{r})_m + \in_{mqi}\, b_q\, (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_m$$

En el primer término del miembro derecho podemos poner $\in_{mni} = \in_{imn}$ y advertimos que tenemos el producto vectorial de **a** y **b** × **r**. Lo mismo con respecto al segundo término. Finalmente,

$$\nabla \xi = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$$

Ejemplo 4. El potencial electrostático $\phi(\mathbf{r})$ producido en el punto P ó **r** por una distribución de carga eléctrica con densidad volúmica de carga ρ viene dado por la integral

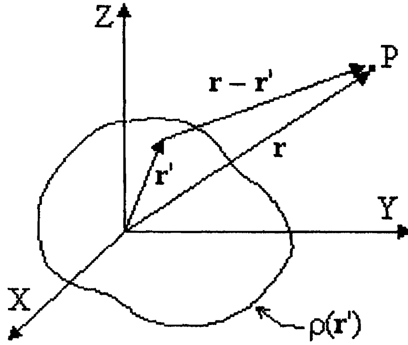


Fig. 12

(25) $$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

La integral se extiende sobre toda la región (acotada) ocupada por la carga. **r** es el vector de posición del "punto campo" fijo P donde se desea evaluar el potencial; este vector permanece constante durante la integración. **r'** es el vector del "punto fuente", esto es, un punto cualquiera de la distribución de carga, donde se localiza el "elemento de carga" de volumen $dV' = dx'dy'dz'$ y carga $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$. El vector **r'** es la variable de integración.

Es natural esperar que si la distribución de carga está acotada y se observa desde muy lejos (o sea max $|\mathbf{r}'| \ll r$), semejará una carga puntual con buena aproximación. En este caso el potencial (25) debe reducirse al término $\phi \approx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Sin embargo,esta aproximación generalmente es muy grosera. Conforme nos acercamos a la distribución vamos apreciando su estructura, la cual puede describirse en términos de distribuciones de carga sucesivamente más complejas llamadas dipolos, cuadrupolos, octupolos, etc. Para descubrir estas particularidades veamos el desarrollo en serie de Taylor a segundo orden

(26) $$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - \mathbf{r}'\bullet\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\bullet\nabla)^2\frac{1}{r} + \ldots$$

Evaluemos los términos del desarrollo:

(27) $$-\mathbf{r}'\bullet\nabla\frac{1}{r} = -\mathbf{r}'\bullet\left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}}{r^3}$$

(28) $$\frac{1}{2}(\mathbf{r}'\bullet\nabla)^2\frac{1}{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\bullet\nabla)(\mathbf{r}'\bullet\nabla)\frac{1}{r} = -\frac{1}{2}(\mathbf{r}'\bullet\nabla)\left(\frac{\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}}{r^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathbf{r}'\bullet\left[\frac{\nabla(\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r})}{r^3} + (\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r})\nabla\frac{1}{r^3}\right] = -\frac{r'^2}{2r^3} + \frac{3(\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r})^2}{2r^5}$$

(Se usó en (28) la fórmula del gradiente de un producto y además (23) y (27)).

Sustituyendo el desarrollo de $\dfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en la integral (25),

(29) $$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\mathbf{r}')\left[\frac{1}{r}+\frac{\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}}{r^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{3(\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r})^2}{r^5}-\frac{r'^2}{r^3}\right)+\ldots\right]dV'$$

Con objeto de sacar de la integral lo que no depende de $\mathbf{r}'$ escribiremos el último término del desarrollo (29) en notación tensorial:

$$\frac{3(\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r})^2}{r^5}-\frac{r'^2}{r^3}=\frac{1}{r^5}\left[3(\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r})(\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r})-r^2r'^2\right]=\frac{1}{r^5}(3x_ix_ix_jx_j-x_ix_ir'^2)=$$

$$=\frac{1}{r^5}(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})x_ix_j$$

Ahora (29) se convierte en

(30) $$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int\rho\,dV'+\frac{\mathbf{r}}{r^3}\bullet\int\mathbf{r}'\rho\,dV'+\frac{x_ix_j}{2r^5}\int\rho(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})\,dV'+\ldots\right\}$$

Con respecto a los diversos términos introducimos las siguientes cantidades:

Carga neta de la distribución $\qquad Q=\int\rho(\mathbf{r}')\,dV'$

Momento dipolar de la distribución $\qquad \mathbf{p}=\int\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,dV'$

Tensor de momento cuadrupolar de la distribución

$$Q_{ij}=\int\rho(\mathbf{r}')(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})\,dV'$$

Las tres cantidades dependen solamente del modo como se distribuye la carga eléctrica.

El “desarrollo multipolar” del potencial queda en la forma

(31) $$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}+\frac{\mathbf{p}\bullet\mathbf{r}}{r^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{Q_{ij}x_ix_j}{r^5}+\ldots\right)$$

Problemas

1. Calcular el valor de la función $f(x, y, z) = 2x^2yz^3$ en el punto (1.01, –2.02, 3.97) mediante (a) sustitución directa, (b) una aproximación lineal con $\in = (0.01, -0.02, -0.03)$.

2. Para la función de la posición y del tiempo $\rho(x, y, z, t)$, demostrar que

$$d\rho = d\mathbf{r} \bullet \nabla\rho + dt\,\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

3. Para la función $H = H(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ de 6 variables x, y, z, v_x, v_y, v_z, demostrar que

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial H}{\partial v_i}dv_i = \nabla H \bullet d\mathbf{r} + \frac{\partial H}{\partial v_i}dv_i$$

4. ¿Cuánto vale y hacia qué dirección ocurre el máximo incremento de la función $T = -3xy^2 + 2yz^3$ en el punto P(1, 0, –2)?

5. A la manera del Ejemplo 1 en la pág. 129, demuestre que el gradiente de una función escalar $\psi(\rho, \theta, z)$ en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

¿Cuál es la expresión de $d\mathbf{r}$ en la base cilíndrica $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$?

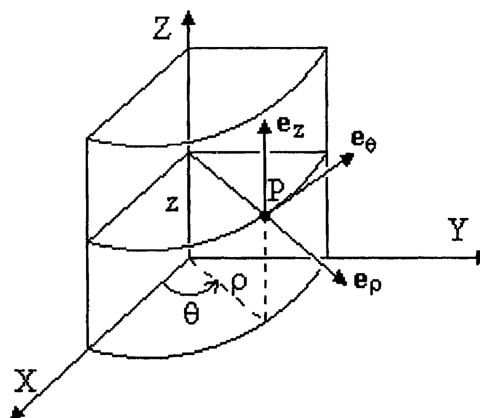


Fig. Probl. 5

6. Partiendo de las propiedades del gradiente de (i) estar en la dirección de máximo incremento y (ii) tener magnitud igual a la derivada direccional en esa dirección, demuestre que si D es la distancia del punto variable P a cierto eje fijo E, entonces

$$\nabla D = \hat{\mathbf{D}} \equiv \frac{\mathbf{D}}{D}$$

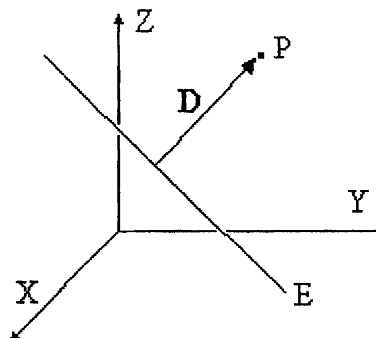


Fig. Probl. 6

7. Hallar el vector unitario perpendicular a la superficie $x^2 - 2y^2 - z = 5$ en el punto P(0, −3, 1).

8. Bosquejar las superficies equipotenciales del campo escalar $\lambda(x, y, z) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{r}$, donde $\mathbf{a} = (2, 3, 12)$ y $\mathbf{r} = (x, y, z)$. (Note que el gradiente de este campo es constante, $\nabla\lambda = \mathbf{a}$).

9. La figura muestra las curvas de nivel de la temperatura de una lámina plana de dimensiones 120 × 100 cm. Calcular gráficamente la magnitud y la dirección del gradiente de la temperatura en los puntos A y B. Los valores de la temperatura están en °C (use las unidades °C/cm). Bosquejar algunas líneas del campo de gradientes.

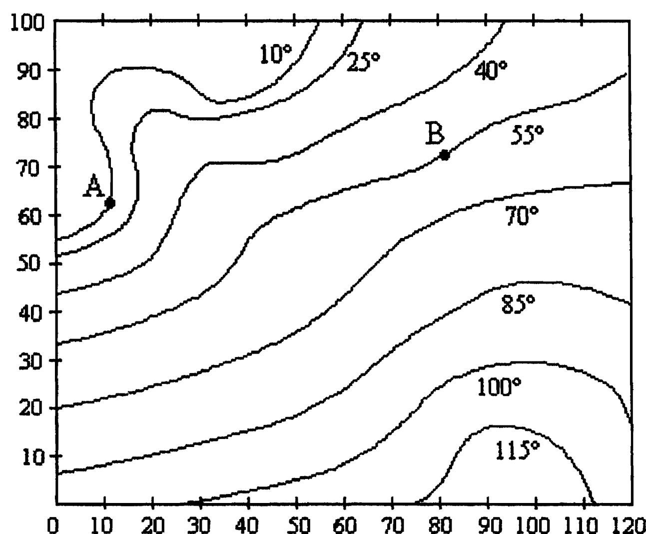


Fig. Probl. 9

10. Calcular el gradiente de las siguientes funciones escalares. Todos los vectores que aparecen en las expresiones son constantes, salvo el vector $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

(a) $\dfrac{e^{\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}}}{r^3}$

(b) $(\mathbf{a} \bullet \mathbf{r})(\mathbf{b} \bullet \mathbf{r})$

(c) $\mathbf{a} \bullet (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$

(d) $-\dfrac{6}{r^6}$

(e) $\dfrac{\cos(k\,|\,\mathbf{r} - \mathbf{c}\,|)}{|\,\mathbf{r} - \mathbf{c}\,|^2}$

(f) $(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \bullet \mathbf{b}$

11. Para el campo vectorial $\mathbf{F} = (-3x^2 + 4yz)\mathbf{i} + 6x \cos y\ \mathbf{j} - 5yz^4\ \mathbf{k}$, calcular la matriz que representa a su tensor gradiente $G_{ij} = \partial F_j/\partial x_i$.

12. Escribir la aproximación lineal para las siguientes expresiones:

(a) $\mathbf{V}(x, y + \eta, z) = \mathbf{V}(x, y, z) + ?$ (b) $S(x + \delta x, y, z - \delta z) = S(x, y, z) + ?$

(c) $\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{m}, t + \Delta t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + ?$ (d) $\mathbf{A}(\mathbf{r} - \lambda\, \Delta\mathbf{r}, \mathbf{v} + \mathbf{p}\, \Delta t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + ?$

13. Desarrollar en serie de Taylor hasta términos de segundo orden en "**a**"

$$\frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}|^3} = \frac{1}{r^3} + \ldots ?$$

14. Refiriéndonos al desarrollo de $\dfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ considerado en el Ejemplo 4 de la página 140, extender dicho desarrollo hasta términos de tercer orden en r′ (es decir, calcular la expresión $\dfrac{1}{3!}(\mathbf{r}' \bullet \nabla)^3 \dfrac{1}{r}$.

15. Usando (12), demostrar que si T_{ij} es un tensor, entonces $\dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$ es un tensor de tercer orden.

16. El vértice P de un rectángulo se va a desplazar una pequeña distancia hasta un nuevo lugar P′. ¿Dónde debe situarse P′ para que el área del rectángulo aumente lo más posible?

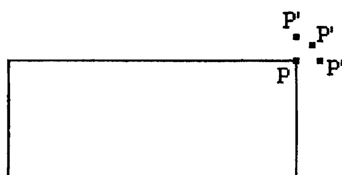


Fig. Probl. 16

7.6. DIVERGENCIA

Los conceptos de "divergencia" y "rotacional" de un campo vectorial son muy intuitivos en la cinemática de los fluidos. Por esta razón expondremos en este apartado los elementos necesarios de cinemática, que nos ayuden a la visualización.

El movimiento de un fluido se describe por medio de los movimientos de sus partículas constitutivas o "elementos de fluido". Cada elemento es lo suficientemente pequeño como para suponerlo localizado en un "punto", contiene no obstante un gran número de moléculas[1]. Designaremos con "s" el vector de posición de un elemento general de fluido (un trozo de *materia*), reservando el símbolo "r" para designar el vector de posición de un *punto* general de la región espacial $\mathcal{R}$ ocupada por el fluido.

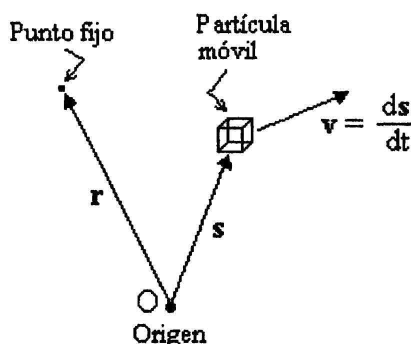


Fig. 13

La diferencia entre los dos vectores es evidente: al moverse el fluido, **s** es una función del tiempo t, cuya derivada ds/dt es la velocidad de la partícula localizada por **s**; en cambio, **r** está asociado con un punto fijo (x, y, z) y es independiente del tiempo (Fig. 13). Dependiendo de si consideramos la evolución temporal de la posición de una partícula, **s**(t), o lo que sucede en un punto de observación fijo del espacio, **r**, obtenemos dos modos de caracterización cinemática del fluido denominados respectivamente modo de Lagrange y modo de Euler.

Modo de Lagrange

En este modo de descripción hay que especificar la función **s**(t) para todas y cada una de las partículas del fluido. Esto lo podemos hacer añadiendo a tal función un argumento "**p**" que sirva para distinguir o "rotular" a las partículas. Podemos escoger para "**p**" la posición inicial (en t = 0) de la partícula asociada. Entonces la totalidad de las trayectorias de los elementos de fluido quedará descritas por la función **s**(**p**, t), con la condición **p** = **s**(**p**, 0).

Por ejemplo, un flujo en el que todas las partículas se desplazan con velocidad constante $\mathbf{v}_0$ se describe por

$$\mathbf{s}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + \mathbf{v}_0\, t$$

La velocidad de la "partícula **p**" es

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{p}, t)}{\partial t}$$

---

[1] Un cubo de arista igual a un décimo de milímetro contiene del orden de 10^{17} moléculas.

Modo de Euler

Este modo de descripción se ha revelado más conveniente y es el más ampliamente usado. Se considera un punto general del espacio, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, y todas aquellas partículas que a diversos instantes pasan sucesivamente por dicho punto. Se define el *campo de velocidades* del fluido en la forma

$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv$ velocidad de aquella partícula que ocupa la posición $\mathbf{r}$ en el instante t

Un flujo con velocidad constante $\mathbf{v}_0$ se describe por el campo

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_0$$

La conexión entre los dos modos de descripción es la siguiente: dado el campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ obtenemos la descripción Lagrangiana resolviendo la ecuación

$$\frac{d\mathbf{s}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$$

con la condición inicial $\mathbf{s}(0) = \mathbf{p}$.

Un campo de velocidades se representa gráficamente por una familia dinámica de *líneas de flujo* del campo $\mathbf{v}$. A cada instante t, las líneas de flujo son curvas cuya tangente en cada punto está en la dirección local del campo $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (Fig. 14).

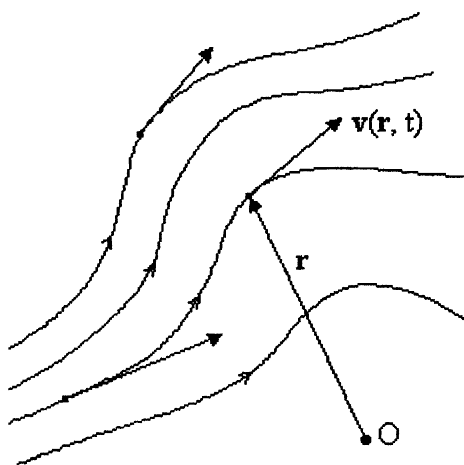


Fig. 14

En general, las líneas de flujo se van modificando conforme transcurre el tiempo, excepto las de los *campos estacionarios*, que son los que cumplen las relaciones

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \equiv 0 \qquad y \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$$

donde $\rho(\mathbf{r}, t)$ es la densidad de masa del fluido. Para estos campos las líneas de flujo coinciden con las trayectorias de las partículas del fluido.

El concepto de divergencia del campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ surge del siguiente análisis, formulado en el marco de Lagrange.

Consideremos un subconjunto de partículas del fluido, que en el instante t = 0 llenan cierta región R_0 del espacio. Denotando con **p** el vector de posición de tales partículas, tendremos que el volumen de R_0 viene dado por

$$V_0 = \int_{R_0} dp_x dp_y dp_z \equiv \int_{R_0} dV^{(p)}$$

Rastreemos en su movimiento este subconjunto de partículas. En el instante t ocuparán otra región R (Fig. 15). La transición de R_0 a R se interpreta convenientemente como un mapeo "s", esto es una función, que transforma el punto **p** en el punto **s**(**p**, t), donde el tiempo t es un parámetro del mapeo (Podemos verla como una sucesión de mapeos).

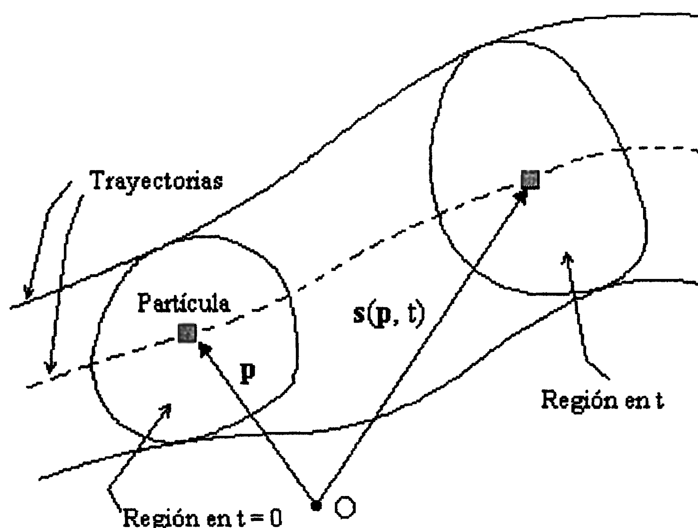


Fig. 15

La función **s** debe cumplir la condición de reducirse a la identidad para t = 0:

(32) $\mathbf{s}(\mathbf{p}, 0) = \mathbf{p}$

Sus derivadas con respecto al parámetro t se identifican con las velocidades de las partículas de R. En particular, las velocidades de las partículas de R_0 son

(33) $$\left.\frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} \equiv \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{r},0)}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{p},0)$$

Ahora bien, el volumen de la región R es

$$V(t) = \int_R ds_x ds_y ds_z = \int_{R_0} \frac{\partial(s_x, s_y, s_z)}{\partial(p_x, p_y, p_z)} dp_x dp_y dp_z$$

donde hemos introducido el Jacobiano de la transformación $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{s}$,

$$J(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial s_x}{\partial p_x} & \dfrac{\partial s_y}{\partial p_x} & \dfrac{\partial s_z}{\partial p_x} \\ \dfrac{\partial s_x}{\partial p_y} & \dfrac{\partial s_x}{\partial p_y} & \dfrac{\partial s_x}{\partial p_y} \\ \dfrac{\partial s_x}{\partial p_z} & \dfrac{\partial s_x}{\partial p_z} & \dfrac{\partial s_x}{\partial p_z} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \in_{ijk} \in_{pqr} \frac{\partial s_p}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial s_q}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial p_k}$$

La rapidez de variación del volumen, evaluada en $t = 0$, es

$$\left.\frac{dV(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[\int_{R_0} J(\mathbf{p}, \mathbf{s}) dV^{(p)}\right]_{t=0} = \int_{R_0} \left.\frac{\partial J(\mathbf{p}, \mathbf{s})}{\partial t}\right|_{t=0} dV^{(p)} =$$

$$= \int_{R_0} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{6} \in_{ijk} \in_{pqr} \frac{\partial s_p}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial s_q}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial p_k}\right]_{t=0} dV^{(p)}$$

Apliquemos

$$\frac{\partial^2 s_p}{\partial t \, \partial p_i} = \frac{\partial^2 s_p}{\partial p_i \, \partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial s_p}{\partial t}\right) = \frac{\partial v_p}{\partial p_i}$$

La última integral se vuelve

$$\int_{R_0} \frac{1}{6} \in_{ijk} \in_{pqr} \left[\frac{\partial v_p}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial s_q}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial p_k} + \frac{\partial s_p}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial v_q}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial s_r}{\partial p_k} + \frac{\partial s_p}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial s_q}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial p_k}\right]_{t=0} dV^{(p)}$$

Para reducir esta integral, evaluemos las derivadas en $t = 0$. Por la ecuación 32,

$$\left.\frac{\partial s_q(\mathbf{p}, t)}{\partial p_j}\right|_{t=0} = \frac{\partial s_q(\mathbf{p}, 0)}{\partial p_j} = \frac{\partial p_q}{\partial p_j} = \delta_{jq}$$

Obtenemos ahora

$$\int_{R_0} \frac{1}{6} \in_{ijk} \in_{pqr} \left(\frac{\partial v_p}{\partial p_i} \delta_{jq} \delta_{kr} + \delta_{ip} \frac{\partial v_q}{\partial p_j} \delta_{kr} + \delta_{ip} \delta_{jq} \frac{\partial v_r}{\partial p_k} \right) dV^{(p)}$$

Usando la fórmula $\in_{ijk} \in_{ijm} = 2\, \delta_{km}$ se llega finalmente a

(34) $$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=0} = \int_{R_0} \frac{\partial v_i}{\partial p_i} dV^{(p)}$$

Recordemos que $(p_x, p_y, p_z) = \mathbf{p}$ son las *coordenadas* de las partículas de fluido que se encuentran *en la región* R_0. Todas las cantidades en (34) se refieren a esta región, incluyendo el vector v_i, que depende de **p** y t, pero está evaluado en t = 0. Por otra parte, el instante t = 0 puede ser de hecho cualquier instante particular del movimiento. En vista de ello, en la ecuación (34) podemos renombrar la variable **p**, llamándola ahora **r** = (x, y, z). El elemento $dV^{(p)}$ se convierte en dxdydz ≡ dV, la integral se toma sobre una región arbitraria R, y obtenemos una relación donde las cantidades se refieren a un tiempo arbitrario t:

(35) $$V'(t) = \int_R \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dxdydz = \int_R (\nabla \bullet \mathbf{v})\, dV$$

Aquí V′(t) es la derivada del volumen con respecto al tiempo. Note que la expresión $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ es el producto escalar del operador nabla, ∇, y del vector **v**, de allí que hayamos hemos puesto

(36) $$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \bullet \mathbf{v}$$

Esta combinación especial de derivadas se denomina la *divergencia* del campo vectorial **v**. Se generaliza la definición de divergencia para un campo vectorial cualquiera **A**(x, y, z) en la forma

(37) $$\nabla \bullet \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{divergencia de } \mathbf{A}$$

También se suele escribir "div **A**". Por construcción, es un invariante o escalar.

De la fórmula (35) sacamos una interpretación muy simple de la divergencia, válida cuando el campo vectorial es el campo de velocidades de un fluido. Suponiendo que la

región $\mathcal{R}$ es mucho muy pequeña, digamos de volumen δV, tendremos que la integral (35) se reduce, por el teorema del valor medio, a

$$V'(t) = (\nabla \bullet \mathbf{v})\,\delta V$$

donde $\nabla \bullet \mathbf{v}$ es la divergencia evaluada en algún punto apropiado de la pequeña región considerada. Por otra parte, la derivada V'(t) se puede evaluar como el cambio de volumen por unidad de tiempo en la forma aproximada

$$V'(t) \approx \frac{\delta V' - \delta V}{\delta t}$$

donde δV′ es el volumen de esa pequeña región un tiempo δt más tarde. Se deduce que

(38) $$\nabla \bullet \mathbf{v} \approx \frac{\delta V' - \delta V}{\delta V \cdot \delta t}$$

En palabras: *la divergencia del campo de velocidades de un fluido, evaluada en un punto cualquiera* P, *es igual al cambio porcentual de volumen, por unidad de tiempo, de un pequeño elemento de fluido ubicado en* P.

Claramente, la ecuación

(39) $$\nabla \bullet \mathbf{v} \equiv 0$$

describe un flujo en el que todos los elementos de fluido conservan su volumen en todo momento, es decir, un *flujo incompresible*.

Si la divergencia de un campo general **A**(**r**) es nula en alguna región espacial se dice que el campo es *solenoidal* en esa región. En general, los campos vectoriales poseen divergencia no nula en algunos puntos, líneas, superficies o regiones tridimensionales. Un punto donde la divergencia de **A** es positiva se denomina "punto fuente" del campo; si la divergencia es negativa, es un "punto sumidero".

De hecho los campos vectoriales son "generados" por sus puntos fuentes y sumideros (también por las llamadas vorticidades, que definiremos posteriormente). Así, en los puntos donde la divergencia del campo de velocidades de un fluido es positiva se "crea" el flujo, y se "destruye" en los puntos donde la divergencia es negativa. Citemos como ejemplo el campo electrostático **E**, que obedece la ecuación

(40) $$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

donde ρ es la densidad de carga eléctrica. La ecuación (40) expresa que las cargas eléctricas generan campo eléctrico (las cargas eléctricas son las "fuentes" del campo eléctrico).

7.7 CÁLCULO DE DIVERGENCIAS

Ejemplo 5. Calcular las siguientes divergencias.

(a) $\nabla \bullet \mathbf{r}$

Esto es el producto escalar del operador gradiente, $\frac{\partial}{\partial x_i}$, y el vector x_i,

$$\nabla \bullet \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x_i} x_i = \delta_{ii} = 3$$

(b) $\nabla \bullet (\phi \mathbf{A})$ donde ϕ es un campo escalar función de la posición.

$$\nabla \bullet (\phi \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi A_i) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} A_i + \phi \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \nabla\phi \bullet \mathbf{A} + \phi \nabla \bullet \mathbf{A}$$

(c) $\nabla \bullet (\Omega \times \mathbf{r})$ donde Ω es un vector constante.

$$\nabla \bullet (\Omega \times \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\in_{ijk} \Omega_j x_k) = \in_{ijk} \Omega_j \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \in_{ijk} \Omega_j \delta_{ik} = \in_{kjk} \Omega_j = 0$$

(porque $\in_{kjk}$ tiene dos índices repetidos y por tanto es una suma de ceros).

Es fácil dar una interpretación a este resultado. Cuando un cuerpo rígido rota en torno a un eje que pasa por un punto fijo del mismo, las velocidades de los puntos del cuerpo son

(41) $$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición relativo al punto fijo y Ω es la velocidad angular del cuerpo. Podemos ver el movimiento del sólido como un "flujo" de materia cuyo campo de velocidades es (41). Dado que los "elementos de fluido", o sea las partículas del sólido, no cambian su volumen al moverse, la divergencia de **v** es cero.

(d) Demostrar que $\nabla \bullet \mathbf{A} = \mathbf{i} \bullet \nabla A_x + \mathbf{j} \bullet \nabla A_y + \mathbf{k} \bullet \nabla A_z$

Sabemos que el operador $\mathbf{u} \bullet \nabla$ da la derivada direccional en la dirección de **u**. Entonces $\mathbf{i} \bullet \nabla = \frac{\partial}{\partial x}$, etc. (También: $\mathbf{i} \bullet \nabla = \delta_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_1}$, etc.). Se sigue que

$$\mathbf{i} \bullet \nabla A_x + \mathbf{j} \bullet \nabla A_y + \mathbf{k} \bullet \nabla Az = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{QED}$$

(e) Demostrar que $\nabla \bullet (\nabla\phi \times \nabla\psi) = 0$.

$$\nabla \bullet (\nabla\phi \times \nabla\psi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\in_{ijk} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) = \in_{ijk} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \in_{ijk} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_k}$$

El producto del tensor épsilon y un tensor simétrico de segundo orden, $\in_{ijk} S_{jk}$, es igual a cero. Como la segundas derivadas de la expresión anterior forman un tensor simétrico, cada término se anula separadamente, QED.

(f) $\nabla \bullet \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \qquad (r \neq 0)$

Consideremos la función vectorial $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ como el producto de $\frac{1}{r^3}$ y $\mathbf{r}$, y apliquemos la regla para la divergencia del producto dada en el inciso (b) de la página precedente.

$$\nabla \bullet \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \frac{1}{r^3} \bullet \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \bullet \mathbf{r} = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5} \bullet \mathbf{r} + \frac{1}{r^3}(3) = 0 \qquad (r \neq 0)$$

El campo vectorial en cuestión es el campo eléctrico de una carga puntual, o el campo gravitacional producido por un punto masa. Este campo tiene una singularidad en el punto donde está la carga, $r = 0$.

(g) $\nabla \bullet [(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})]$

Expresamos primeramente $[(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})]_i = \in_{ijk} (\in_{jmn} a_m x_n) (\in_{kpq} b_p x_q)$. De esta expresión hay que derivar el producto $x_n x_q$,

$$\frac{\partial(x_n x_q)}{\partial x_i} = x_n \delta_{iq} + x_q \delta_{in}$$

Entonces,

$$\nabla \bullet [(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})] = \in_{ijk} \in_{jmn} a_m \in_{kpq} b_p (x_n \delta_{iq} + x_q \delta_{in}) =$$

$$= \in_{qjk} \in_{jmn} a_m \in_{kpq} b_p x_n + \in_{njk} \in_{jmn} a_m \in_{kpq} b_p x_q$$

Se deja como ejercicio traducir al cristiano. Debe obtenerse

$$\nabla \bullet [(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})] = 4\, \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \times \mathbf{r}$$

7.8 La ecuación de continuidad

Consideremos un fluido cuyo movimiento se describe mediante el campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Sea $\rho(\mathbf{r}, t)$ la densidad de masa del fluido.

Existe una ecuación diferencial parcial que expresa la ley de conservación de la masa del fluido, denominada *ecuación de continuidad*. La deduciremos aquí aplicando un "*método local*", esto es, imponiendo la condición de conservación de la masa de un pequeño elemento de fluido constituido en todo momento por el mismo conjunto de moléculas. Existe también el llamado "*método global*", en el cual se impone dicha conservación para una porción grande del fluido. Posteriormente expondremos este método.

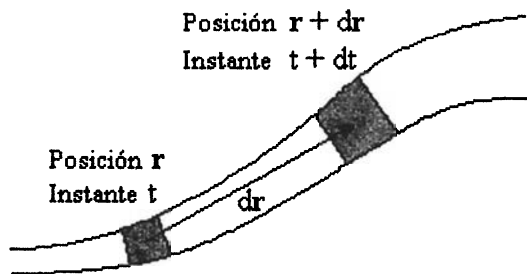


Fig. 16

En la Fig. 16 se muestran dos posiciones de un mismo elemento de fluido, esto es, de una pequeña porción de fluido que consta de las mismas moléculas. Se muestran también unas líneas de flujo correspondientes al instante t. El desplazamiento $d\mathbf{r}$ del elemento al cabo del tiempo dt viene dado en términos del campo de velocidades por

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\, dt \tag{42}$$

Igualemos la masa del elemento en t a la masa en t + dt,

$$\rho(\mathbf{r}, t)\, \delta V = \rho(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt)\, \delta V'$$

donde δV y $\delta V'$ son los volúmenes en t y t + dt, respectivamente. Tomemos una aproximación lineal para el miembro derecho de la ecuación:

$$\rho\, \delta V = [\rho + \nabla\rho \bullet d\mathbf{r} + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\,]\, \delta V'$$

Sustituyamos $\delta V'$ en esta ecuación, tomándolo de la ecuación (38) en la forma $\delta V' = \delta V\,(1 + \nabla \bullet \mathbf{v}\, dt)$. Despreciando productos de diferenciales $d\mathbf{r}\, dt$ y $(dt)^2$ y usando (42) llegamos a

$$\rho\, \nabla \bullet \mathbf{v} + \nabla\rho \bullet \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Esta es la ecuación de continuidad, o ley de conservación de la masa. Se puede poner en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho\, \mathbf{v}) = 0 \tag{43}$$

Problemas

1. Sean $\rho(\mathbf{r}, t)$ la densidad de masa de un fluido, y $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ el campo de velocidades del mismo. La densidad cambia en el transcurso del tiempo, y también de punto a punto a través de la región ocupada por el fluido. Su diferencial total $d\rho$ incluye las contribuciones debidas a ambas variaciones, de $\mathbf{r}$ y de t, en la forma $d\rho = \nabla\rho \bullet d\mathbf{r} + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$. Tenga presente que en esta ecuación $d\mathbf{r}$ es arbitrario y puede tomarse hacia cualquier dirección. Obtenga la diferencial de ρ en el caso especial en que $d\mathbf{r}$ se toma precisamente hacia donde se mueve la partícula de fluido localizada en $\mathbf{r}$. Esta diferencial se suele denotar por $D\rho$, y llamar *diferencial convectiva* o *diferencial material*.

2. Demuestre que la ecuación que expresa la ley de conservación de la masa de un fluido, en el marco de la descripción Lagrangiana, tiene la forma

$$\rho_0 = \rho \, \frac{\partial(s_x, s_y, s_z)}{\partial(p_x, p_y, p_z)}$$

Sugerencia. Considere las regiones R_0 y R definidas en la página 147. Suponga que $\rho_0(\mathbf{p})$ describe la distribución de masa de la región R_0, y $\rho(\mathbf{s})$ hace lo correspondiente para R. Iguale las masas de ambas regiones (la masa es la integral de la densidad sobre cada región). Convierta la integral sobre R a una integral sobre R_0).

3. Exprese el Jacobiano de la página 148 en la forma simplificada

$$J(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial s_i}{\partial p_1} \frac{\partial s_j}{\partial p_2} \frac{\partial s_k}{\partial p_3}$$

y úselo para arribar a la ecuación 34.

4. Escoja un elemento de fluido en forma de prisma rectangular de lados dx, dy, dz, orientado según los ejes de un sistema cartesiano. Suponga que después de un tiempo dt, los vértices A, B, C y D se mueven a A′, B′, C′ y D′. El volumen del elemento en t es $\delta V = dxdydz$. Demuestre que

$$\mathbf{A'B'} = \mathbf{AB} + [\mathbf{v}(B) - \mathbf{v}(A)]dt = \mathbf{AB} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx\, dt$$

Calcule el nuevo volumen del elemento usando

$$\delta V' = \mathbf{A'B'} \bullet \mathbf{A'C'} \times \mathbf{A'D'}$$

y llegue a la ecuación 38.

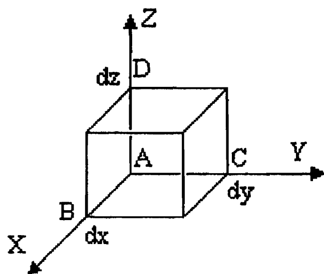


Fig. Probl. 4

5. Calcular la divergencia de los siguientes campos.

(a) $\mathbf{V} = \dfrac{x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}}{x + y}$

(b) $\mathbf{F} = x \cos z\,\mathbf{i} + y \ln x\,\mathbf{j} - z^2\,\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^n}$

(d) $\mathbf{C} = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{r})\,\mathbf{r}$ (**a** constante)

(e) $\mathbf{B} = \dfrac{\mathbf{b} \times \mathbf{r}}{r^2}$ (**b** constante)

(f) $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$

6. Calcular la divergencia del campo

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{V}(P) = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{R}}{R^2}$$

donde **R** es el vector ortoaxial tomado desde un eje fijo E hasta el punto variable P. Sugerencia. Use el problema 6 de la página 142. Demuestre que $\nabla f(R) = f'(R)\,\mathbf{R}/R$.

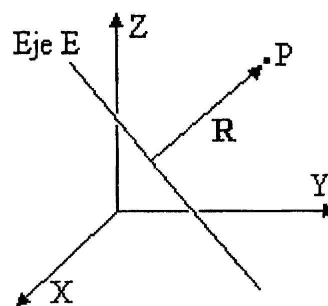


Fig. Probl. 6

7.9 ROTACIONAL

El *rotacional* de un campo vectorial **A**(x, y, z) es una función vectorial de la posición definida por

(44) $$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Como se indica, podemos verlo como el producto vectorial del operador ∇ y el vector **A**, en la forma

(45) $$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

En la notación tensorial,

(46) $$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

El rotacional tiene una interpretación física muy intuitiva cuando el campo vectorial considerado es el campo de velocidades de un fluido. En este apartado nos limitaremos al caso especial del movimiento de un sólido.

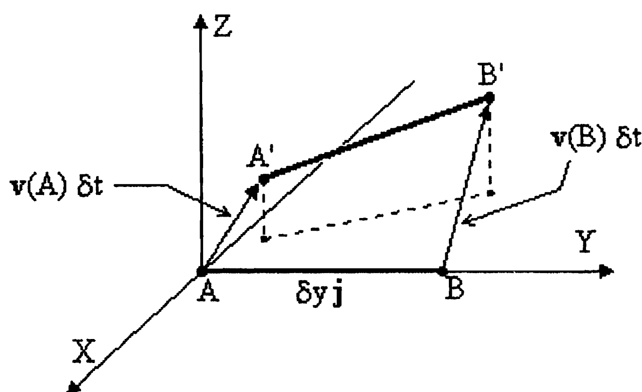


Fig. 17

Consideremos un cuerpo rígido en movimiento con velocidad angular Ω. Sea AB un segmento determinado por dos puntos A y B del sólido. Coloquemos A en el origen de un sistema cartesiano, y B sobre el eje Y, a una distancia δy de A, como vemos en la Fig. 17.

Sea A'B' la posición del segmento AB después de un tiempo δt (con $|\mathbf{A'B'}| = |\mathbf{AB}|$). Como sabemos, las velocidades de A y B están relacionadas por

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{AB}$$

o bien, poniendo $\mathbf{AB} = \delta y\ \mathbf{j}$,

(47) $$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{j})\ \delta y$$

Los puntos A(0, 0, 0) y B(0, δy, 0) están muy próximos, de tal modo que la diferencia de sus velocidades puede escribirse en términos de una derivada. Efectivamente, aplicando la aproximación lineal tenemos

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \mathbf{v}(0, \delta y, 0) - \mathbf{v}(0, 0, 0) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\delta y$$

así que (47) se vuelve

(48) $$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j}$$

Multipliquemos escalarmente esta ecuación por el vector unitario **i**. Obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \bullet \mathbf{i} = \frac{\partial(\mathbf{v} \bullet \mathbf{i})}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j} \bullet \mathbf{i} = \mathbf{\Omega} \bullet (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \mathbf{\Omega} \bullet (-\mathbf{k}) = -\Omega_z$$

(49) $$\Omega_z = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Multiplicando (48) escalarmente por **k** obtenemos

(50) $$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

Considerando ahora segmentos a lo largo de los ejes X y Y y procediendo análogamente obtendríamos otras relaciones semejantes. En total son las siguientes,

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial z} \qquad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial x} \qquad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Conviene escribir cada componente como una combinación de derivadas,

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \qquad \Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \qquad \Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

con el fin de expresar $\mathbf{\Omega}$ en una forma que manifieste su carácter vectorial, a saber,

(51) $$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v}$$

Esta misma relación es válida en general para un medio continuo deformable. En su movimiento, los elementos de volumen del medio se trasladan, rotan y se deforman. La velocidad angular con que rotan los elementos viene dada por (51), donde $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ es el campo de velocidades del medio.

Para un campo vectorial arbitrario $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ la interpretación del rotacional $\nabla \times \mathbf{A}$ no es tan directa. Daremos una visualización para el caso particular de un campo $\mathbf{A}$ cuyo tensor gradiente sea antisimétrico, es decir,

(52) $$G_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = -G_{ji} = -\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

La diferencial total del campo es

(53) $$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} dx_j = G_{ji} dx_j = (G_{ji}^{(S)} + G_{ji}^{(A)}) dx_j$$

donde $G_{ji}^{(S)}$ y $G_{ji}^{(A)}$ son las partes simétrica y antisimétrica del tensor G_{ji},

$$G_{ji}^{(S)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) \qquad G_{ji}^{(A)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)$$

Por hipótesis, $G_{ji}^{(S)} = 0$, y (53) queda

(54) $$dA_i = G_{ji}^{(A)} dx_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) dx_j$$

Aplicando a (54) la relación

$$T_{ij} - T_{ji} = \in_{ijk} \in_{kmn} T_{mn}$$

válida para cualquier tensor T_{ij}, resulta

$$dA_i = -\frac{1}{2} \in_{ijk} (\nabla \times \mathbf{A})_k \, dx_j$$

o sea

(55) $$d\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}) \times d\mathbf{r}$$

Por lo tanto, los incrementos **dA** son perpendiculares tanto al rotacional $\nabla \times \mathbf{A}$ como a **dr**. Tracemos el vector de campo **A** y su rotacional en un punto arbitrario P (Fig. 18). Consideremos un conjunto de puntos Q vecinos a P, situados en una circunferencia de radio |**dr**| y plano perpendicular a $\nabla \times \mathbf{A}$.

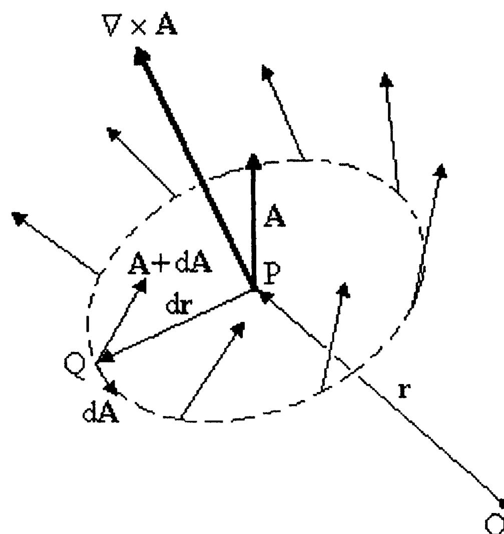


Fig. 18

El valor del campo en los puntos Q es **A** + **dA**. Como los **dA**, por ser perpendiculares al rotacional, se disponen tangencialmente a esta circunferencia, se produce un "enroscamiento" de los vectores de campo en los puntos Q, alrededor de la dirección del rotacional en P.

7.10 CÁLCULO DE ROTACIONALES

Ejemplo 6. (a) Calcular el rotacional del campo $\mathbf{V} = xy^2\,\mathbf{i} - 3yz^3\,\mathbf{j} + x^2z\,\mathbf{k}$.

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & -3yz^3 & x^2z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial(x^2z)}{\partial y} - \frac{\partial(-3yz^3)}{\partial z}\right) +$$

$$+\ \mathbf{j}\left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial z} - \frac{\partial(x^2z)}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial(-3yz^3)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\right) = -9yz^2\,\mathbf{i} - 2xz\,\mathbf{j} - 2xy\,\mathbf{k}$$

(b) Calcular el rotacional $\nabla \times (\Omega \times \mathbf{r})$

$$[\nabla \times (\Omega \times \mathbf{r})]i = \in ijk\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\in_{kmn}\ \Omega_m x_n\right) = \in_{ijk} \in_{kmn} \Omega_m\, \delta_{jn} =$$

$$= \in_{ijk} \in_{kmj} \Omega_m = 2\ \delta_{im}\, \Omega_m = 2\ \Omega_m = 2(\Omega)_m \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times (\Omega \times \mathbf{r}) = 2\ \Omega$$

(c) Demostrar la identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \bullet \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \bullet \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \bullet \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{A}(\nabla \bullet \mathbf{B})$$

$$[\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i = \in_{ijk}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\in_{kmn}\ A_m B_n\right) = \in_{ijk} \in_{kmn} \left(\frac{\partial A_m}{\partial x_j} B_n + A_m \frac{\partial B_m}{\partial x_j}\right) =$$

$$= (\delta_{im}\, \delta_{jn} - \delta_{in}\, \delta_{jm})\left(\frac{\partial A_m}{\partial x_j} B_n + A_m \frac{\partial B_m}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} B_j + A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_j} B_i - A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

Pasemos a la notación simbólica. Los factores $\dfrac{\partial B_j}{\partial x_j}$ y $\dfrac{\partial A_j}{\partial x_j}$ son las divergencias de **B** y **A**, respectivamente. Por otra parte,

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} B_j = B_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \left(B_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) A_i = [(\mathbf{B} \bullet \nabla)\mathbf{A}]_i \qquad \text{etc.}$$

de donde se obtiene la identidad planteada.

Problemas

1. Demostrar la fórmula para el rotacional de un producto,

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla\phi \times \mathbf{A} + \phi\, \nabla \times \mathbf{A}.$$

2. Dado que $\rho \mathbf{f} = \nabla\rho$, demuestre que $\mathbf{f} \bullet \nabla \times \mathbf{f} = 0$.

3. Suponiendo que **u** es un vector unitario constante, demuestre que

$$\mathbf{u} \bullet [\nabla(\mathbf{V} \bullet \mathbf{u}) - \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{u})] = \nabla \bullet \mathbf{V}$$

4. Demostrar las siguientes identidades vectoriales.

(a) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(b) $\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \bullet \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{A}$

(c) $\nabla(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \bullet \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \bullet \nabla)\mathbf{A}$

5. Demostrar que el rotacional de un campo central de fuerzas es igual a cero:

$$\nabla \times [f(r)\, \mathbf{r}] = 0$$

6. Calcular el rotacional de los siguientes campos.

(a) $\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$ (b) $\dfrac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3}$ (**a** constante)

7. **r** es (x, y, z), y u, v son dos parámetros; demostrar que

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\mathbf{A} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathbf{A} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)$$

8. Demostrar que si $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, entonces $\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = 0$.

9. ¿Es válida la relación

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \qquad ?$$

7.11 LAPLACIANO

El producto escalar del operador nabla consigo mismo es

$$\nabla \bullet \nabla = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Este operador escalar, que se escribe ∇^2, se denomina el *Laplaciano*. Juega un papel muy importante en las aplicaciones.

Se puede aplicar sobre cualquier función tensorial de la posición. Aplicado sobre una función escalar es

$$\nabla^2 \psi = (\nabla \bullet \nabla)\psi = \nabla \bullet (\nabla \psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i} \tag{56}$$

Aplicado sobre una función vectorial es

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 (A_x\, \mathbf{i} + A_y\, \mathbf{j} + A_z\, \mathbf{k}) = (\nabla^2 A_x)\, \mathbf{i} + (\nabla^2 A_y)\, \mathbf{j} + (\nabla^2 A_z)\, \mathbf{k} \tag{57}$$

$$[\nabla^2 \mathbf{A}]_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

y aplicado sobre una función tensorial $T_{ijk\ldots mn}$ es

$$\nabla^2 T_{ijk\ldots mn} = \frac{\partial^2 T_{ijk\ldots mn}}{\partial x_s \partial x_s} \qquad (s \neq i,j,k,\ldots,m,n) \tag{58}$$

El Laplaciano, por ser un operador escalar, no cambia el orden del tensor al que se aplica.

Obtendremos a continuación una idea intuitiva del Laplaciano. Como se muestra en la Fig. 19, consideremos un punto P arbitrario y 6 puntos vecinos situados a iguales distancias "δs", que forman una cruceta. Demostraremos que el Laplaciano de una función φ, evaluado en P, es proporcional a la diferencia entre el valor de la función en P y el promedio de los valores de la función en esos 6 puntos vecinos, o sea

$$(\nabla^2 \varphi)_P \propto \varphi(P) - \langle \varphi \rangle$$

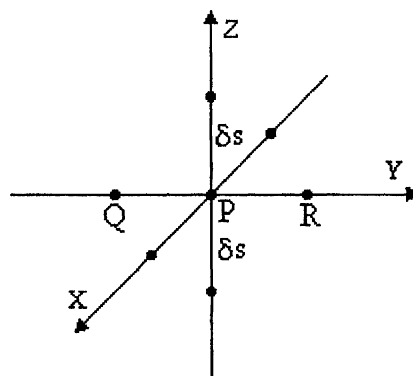


Fig. 19

Supongamos que las coordenadas de P son (x, y, z). Entonces los puntos Q y R tendrán coordenadas Q(x, y – δs, z) y R(x, y + δs, z). Desarrollemos a segundo orden el valor de la función φ en Q,

$$\varphi(x, y - \delta s, z) = \varphi(x, y, z) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\delta s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\,(\delta s)^2$$

Hagamos lo mismo con φ(R),

$$\varphi(x, y + \delta s, z) = \varphi(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\delta s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\,(\delta s)^2$$

Sumando ambas expresiones desaparecen los términos de primer orden en δs,

$$\varphi(Q) + \varphi(R) = 2\,\varphi(P) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\,(\delta s)^2$$

Hagamos lo mismo para las otras dos parejas de puntos vecinos. Llegamos a que el valor promedio de φ sobre los 6 puntos de la cruceta es

$$<\varphi> = \varphi + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)(\delta s)^2$$

Esto es,

(59) $$\varphi - <\varphi> = -\frac{\delta s^2}{6}\nabla^2 \varphi$$

Como el miembro derecho de esta relación es un escalar, la relación no depende realmente de la elección inicial de ejes. Es decir, uno puede girar la cruceta (pivoteada en P y manteniendo los ejes fijos) y se obtendrá el mismo resultado. Por consiguiente, es de esperarse que el Laplaciano de una función evaluado en un punto P sea proporcional a la diferencia del valor de la función en P y el valor promedio de la función sobre una superficie esférica con centro en P.

Problemas

1. Demostrar la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \bullet \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

2. Demostrar que para $r \neq 0$,

(a) $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ (b) $\nabla^2 \left[\nabla \bullet \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} \right) \right] = \frac{2}{r^4}$

3. Dar una fórmula para el laplaciano de una función de "r",

$$\nabla^2 f(r) = ?$$

4. Demostrar que $\nabla^2 (\varphi\psi) = \varphi \nabla^2 \psi + 2 \nabla\varphi \bullet \nabla\psi + \psi \nabla^2 \varphi$

5. **F** y **G** son dos campos vectoriales irrotacionales. Demostrar que el campo $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ es solenoidal.

CAPÍTULO 8	CURVAS, SUPERFICIES Y COORDENADAS CURVILÍNEAS

8.1 CURVAS

Los temas que abordaremos en este capítulo, de mucha aplicación a la física, pertenecen a una rama de las matemáticas llamada "geometría diferencial". Comprenden los conceptos de parametrización de curvas y superficies, curvatura, torsión, sistemas generales de coordenadas y la métrica del espacio.

Sean $\xi(u)$, $\psi(u)$ y $\zeta(u)$ funciones del parámetro "u", definidas y continuas en cierto intervalo $a \leq x \leq b$. El conjunto de puntos (x, y, z) que se obtienen poniendo

(1) $\quad x = \xi(u) \qquad y = \psi(u) \qquad z = \zeta(u)$

o bien $\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$

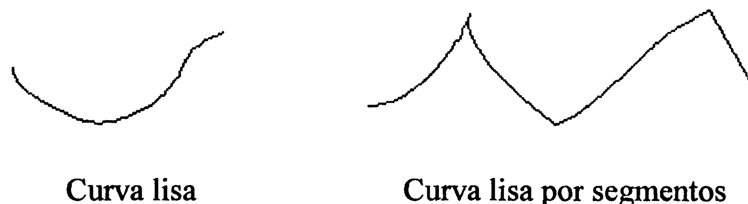
y suponiendo que "u" toma todos los valores en el intervalo [a, b], se denomina una *curva continua*. Si además a dos valores diferentes del parámetro les corresponden puntos diferentes de la curva, ésta se denomina *curva de Jordan* o *curva simple*. La curva simple se llama *cerrada* si a dos valores diferentes de "u" les corresponden puntos diferentes de la curva, excepto para los valores extremos $u = a$ y $u = b$, a los que les corresponde un mismo punto.

Una curva simple se denomina *lisa* si las funciones $\xi(u)$, $\psi(u)$ y $\chi(u)$ poseen derivadas continuas en [a, b], y estas derivadas no se anulan simultáneamente, o sea

$$(\xi'(u))^2 + (\psi'(u))^2 + (\zeta'(u))^2 > 0 \qquad \text{para toda u}$$

Naturalmente, en los puntos extremos $u = a$ y $u = b$ requerimos solamente que existan derivadas laterales, y que estas sean continuas lateralmente.

Una curva simple se denomina *lisa por segmentos* si las funciones ξ, ψ y ζ poseen derivadas continuas en todo el intervalo $a \leq u \leq b$, excepto en un número finito de puntos del mismo (Fig. 1).



Curva lisa $\qquad$ Curva lisa por segmentos

Fig. 1

Consideremos dos puntos de una curva lisa Γ, correspondientes a valores “u” y “u + Δu” del parámetro (Fig. 2).

Pongamos

$$\mathbf{r}(u + \Delta u) - \mathbf{r}(u) = \Delta \mathbf{r}$$

Conforme $\Delta u \to 0$, el vector $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta u}$ tiende hacia la dirección tangente a la curva en el punto “u”. El *vector unitario tangente* es entonces

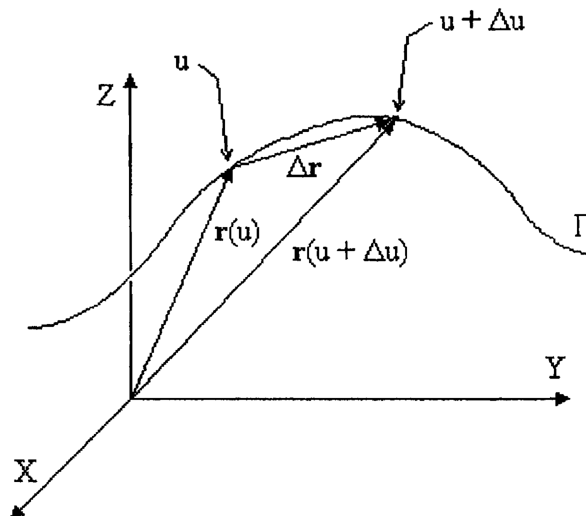


Fig. 2

(2) $$\mathbf{T} = \frac{1}{h} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du}$$

donde

(3) $$h = \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right|$$

es el “factor de escala”. Si en particular se escoge como parámetro la longitud de arco “s”, que es la distancia medida a lo largo de la curva desde cierto punto fijo u_0, tendremos

(4) $$|d\mathbf{r}| = ds$$

$$h = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1$$

(5) $$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

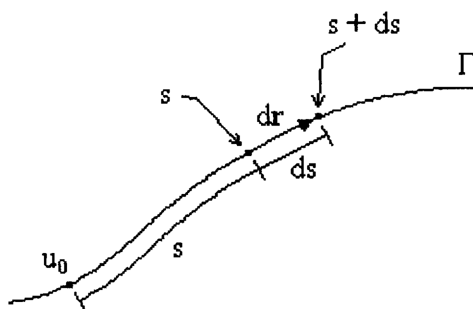


Fig. 3

Dada una representación paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, la longitud de arco se calcula usando la relación $ds = |d\mathbf{r}|$ como sigue:

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r} \bullet d\mathbf{r} \qquad \frac{ds^2}{du^2} = \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \frac{d\mathbf{r}}{du} \bullet \frac{d\mathbf{r}}{du}$$

(6) $$s = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{du} \bullet \frac{d\mathbf{r}}{du}}\, du = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du$$

En lo sucesivo denotaremos a las derivadas con respecto al parámetro general "u" mediante puntos, y a las derivadas con respecto a "s" mediante primas. Así pues, escribiremos las ecuaciones (5) y (6) en la forma

(7) $$\mathbf{T} = \mathbf{r}'$$

(8) $$\dot{s}^2 = \dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}} \qquad s = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}}}\, du$$

Para investigar las propiedades de las curvas, resulta conveniente definir en cada punto de las mismas una terna ortonormal de vectores, que consta de:

1) El vector unitario tangente **T**,

2) El *vector unitario normal*, definido por

(9) $$\mathbf{N} = \frac{1}{\chi}\mathbf{T}'$$

donde $\chi = |\mathbf{T}'|$ se denomina la *curvatura*. Su recíproco,

(10) $$\rho = \frac{1}{\chi}$$

es el *radio de curvatura*. Obviamente **N** es perpendicular a **T** puesto que **T** tiene magnitud constante y por tanto la derivada **T′** es perpendicular a **T** .

3) El *vector unitario binormal* **B**, definido por

(11) $$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

La terna derecha {**T**, **N**, **B**} es función del punto, es decir, varía su orientación a lo largo de la curva. Constituye una base ortonormal variable.
De importancia fundamental en la teoría de las curvas son las "fórmulas de Frenet-Serret", que expresan las derivadas de los vectores **T**, **N** y **B** en términos de ellos mismos. La ecuación (9) es ya una de estas derivadas: $\mathbf{T}' = \chi\mathbf{N}$. Para obtener la derivada de **B** partimos de la relación (11), derivándola con respecto a "s":

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T}' \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \mathbf{N}'$$

Usando (9) reducimos lo anterior a

(12) $$\mathbf{B}' = \mathbf{T} \times \mathbf{N}'$$

Como **N′** es perpendicular a **N**, y está en el plano de **T** y **B**, se puede poner en la forma

$$\mathbf{N}' = \alpha\, \mathbf{T} + \tau\, \mathbf{B}$$

donde α y τ son números apropiados. Con esto, (12) se vuelve

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T} \times (\alpha\, \mathbf{T} + \tau\, \mathbf{B}) = \tau\, \mathbf{T} \times \mathbf{B}$$

Obtenemos así la derivada de **B**:

(13) $$\mathbf{B}' = -\,\tau\, \mathbf{N}$$

El escalar τ se denomina la *torsión*, y su recíproco, el *radio de torsión*.

Finalmente, para obtener **N′** partimos de la relación **N** = **B** × **T**:

$$\mathbf{N}' = \mathbf{B}' \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \mathbf{T}' = -\,\tau\, \mathbf{N} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times (\chi \mathbf{N}) = \tau\, \mathbf{B} - \chi \mathbf{T}$$

Reunamos las fórmulas de Frenet-Serret:

(14) $$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \chi \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -\,\chi\, \mathbf{T} + \tau\, \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= -\,\tau\, \mathbf{N} \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Interpretación de la curvatura para una curva plana.

Para una curva en el plano XY (Fig. 4), el vector binormal **B** es constante, igual al vector cartesiano básico **k**: **B** = **T** × **N** = **k**. La relación **B′** = – τ **N** da entonces $\tau = 0$: la torsion es cero idénticamente. Las curvas planas "no se tuercen".

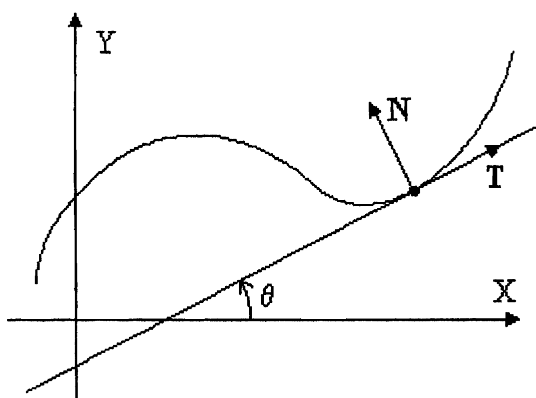


Fig. 4

Por otra parte, la curvatura χ es la tasa de variación, con la distancia medida a lo largo de la curva, del ángulo θ que forma con el eje X la tangente a la curva en el punto considerado (Véase la Fig. 4). Demostrémoslo.

Escribamos **T** en la base cartesiana, en la forma

$$\mathbf{T} = (\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta,\ 0)$$

De acuerdo con (14), la curvatura $|\chi|$ es la magnitud de la derivada **T′**, o sea

(15) $$|\chi| = |\,\mathbf{T}'\,| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{d\theta}\right| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| \left|(-\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta,\ 0)\right| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| \qquad \text{QED.}$$

El concepto de curvatura es muy intuitivo en el caso de las curvas planas. Imaginemos el movimiento de un automóvil a lo largo de una carretera plana y curva. Conforme el automóvil se desplaza, su dirección de movimiento (misma que la del vector unitario tangente **T**) va variando continuamente. La curvatura es una medida de la rapidez con que varía la dirección de movimiento con respecto a la distancia recorrida. Una curva pronunciada del camino es una donde el automóvil vira un ángulo $\Delta\theta$ grande en una distancia Δs corta; en este caso la curvatura promedio es mayor que si el viraje se efectuara a lo largo de una distancia mayor.

Ejemplo 2. Obtener las fórmulas para la curvatura y la torsión de una curva parametrizada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$.

De la ecuación $\mathbf{T}' = \chi\mathbf{N}$ tenemos $\mathbf{T}' \bullet \mathbf{T}' = \chi^2$. Usando la relación (5), $\mathbf{T} = \mathbf{r}'$, tenemos así

(16) $$\chi^2 = \mathbf{r}'' \bullet \mathbf{r}''$$

Ahora queremos relacionar la derivada con respecto a "s", que aparece aquí, con la derivada con respecto al parámetro "u". Usando la regla de la cadena tenemos

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{du} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{r}} = \dot{s}\,\mathbf{r}'$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{s}\,\mathbf{r}' + \dot{s}\frac{d\mathbf{r}'}{du} = \ddot{s}\,\mathbf{r}' + \dot{s}\cdot\mathbf{r}''\dot{s} = \ddot{s}\,\mathbf{r}' + \dot{s}^2\mathbf{r}''$$

$$\dddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'''\,\dot{s}^3 + 3\mathbf{r}''\dot{s}\,\ddot{s} + \mathbf{r}'\,\dddot{s}$$

Sustituyendo en (16) llegamos a

$$\chi^2 = \frac{1}{\dot{s}^6}\left[(\ddot{\mathbf{r}} \bullet \ddot{\mathbf{r}})\,\dot{s}^2 - 2(\dot{\mathbf{r}} \bullet \ddot{\mathbf{r}})\dot{s}\,\ddot{s} + (\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}})\ddot{s}^2\right]$$

Por otra parte, derivando la relación $\dot{s}^2 = \dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}}$ con respecto a "u" tenemos $\dot{s}\,\ddot{s} = \dot{\mathbf{r}} \bullet \ddot{\mathbf{r}}$, de modo que $(\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}})\ddot{s}^2 = \dot{s}^2\,\ddot{s}^2 = (\dot{\mathbf{r}} \bullet \ddot{\mathbf{r}})^2$, con lo que, finalmente,

(17) $$\chi = \frac{1}{\dot{s}^3}\sqrt{(\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}} \bullet \ddot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}} \bullet \ddot{\mathbf{r}})^2}$$

La expresión (17) es bastante complicada. Para curvas planas se simplifica un poco, convirtiéndose en la expresión

(18) $$\chi = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Si la curva se describe por una ecuación de la forma y = f(x), que podemos ver como una representación paramétrica con parámetro u = x, y = f(u), la expresión (18) se vuelve

(19) $$\chi = \frac{\dfrac{d^2f}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{df}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Pasemos ahora al cálculo de la torsión τ. De las fórmulas de Frenet-Serret tenemos

(20) $$\tau = \mathbf{N}' \bullet \mathbf{B}$$

Tanto $\mathbf{N}'$ como $\mathbf{B}$ pueden expresarse en términos de derivadas de $\mathbf{r}$:

(21) $$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{T} \times \left(\frac{1}{\chi}\mathbf{T}'\right) = \frac{1}{\chi}\,\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$$

Derivando la relación $\mathbf{T}' = \chi \mathbf{N}$ se tiene

(22) $$\mathbf{T}'' = \mathbf{r}''' = \chi'\,\mathbf{N} + \chi\,\mathbf{N}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{N}' = \frac{1}{\chi}(\mathbf{r}''' - \chi'\,\mathbf{N})$$

Sustituyendo (21) y (22) en (20) y tomando en cuenta que $\mathbf{N} \bullet \mathbf{B} = 0$,

$$\tau = \frac{1}{\chi}(\mathbf{r}''' \bullet \mathbf{B}) = \frac{1}{\chi^2}\,\mathbf{r}''' \bullet \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$$

Usando ahora (16) queda

(23) $$\tau = \frac{\mathbf{r}' \bullet \mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'''}{\mathbf{r}'' \bullet \mathbf{r}''}$$

Para expresar (23) en una forma apropiada a la representación paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, usamos las expresiones dadas al principio de este ejemplo para las derivadas de $\mathbf{r}$ con respecto a u. Formamos el producto vectorial

$$\dot{\mathbf{r}} \bullet \ddot{\mathbf{r}} \times \dddot{\mathbf{r}} = \dot{s}^6\ \mathbf{r}' \bullet \mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'''$$

(24)
$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \bullet \ddot{\mathbf{r}} \times \dddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}} \bullet \ddot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}} \bullet \ddot{\mathbf{r}})^2}$$

Ejemplo 3. En la mecánica de las partículas es usual describir las trayectorias mediante representaciones paramétricas en las que el parámetro es el tiempo "t". El vector de posición de la partícula viene dado por una ecuación de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

La velocidad es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} \equiv \nu\mathbf{T} \qquad \text{con} \qquad \nu \equiv \frac{ds}{dt}$$

donde ν es la componente (única) de la velocidad $\mathbf{v}$ a lo largo de la dirección tangencial a la trayectoria, que es $\mathbf{T}$. La magnitud de la velocidad, o rapidez, es $v = |\mathbf{v}| = |\nu|$.

La aceleración es

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\nu}{dt}\mathbf{T} + \nu\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\nu}{dt}\mathbf{T} + \nu\mathbf{T}'\frac{ds}{dt} = \frac{d\nu}{dt}\mathbf{T} + \nu^2\mathbf{T}'$$

$$= \frac{d\nu}{dt}\mathbf{T} + \nu^2\chi\mathbf{N} = \frac{d\nu}{dt}\mathbf{T} + \frac{\nu^2}{\rho}\mathbf{N}$$

donde ρ es el radio de curvatura de la trayectoria. Las componentes de la aceleración a lo largo de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ se denominan respectivamente *aceleración tangencial* y *aceleración centrípeta o normal*. Son respectivamente

$$a_T = \frac{d\nu}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad\qquad a_N = \frac{\nu^2}{\rho} = \chi\nu^2$$

Problemas

1. Una curva plana, cuya ecuación en coordenadas polares es $r = f(\theta)$, se puede representar paramétricamente por las ecuaciones

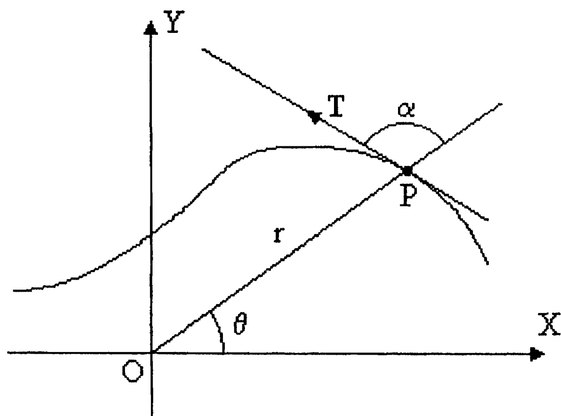


Fig. probl 1

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Demostrar que el ángulo α que forman en un punto P de la curva el vector tangente **T** y la recta radial OP viene dado por

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\,\mathrm{sen}\theta}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \qquad \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{-\dot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{y}\cos\theta}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

o bien por

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}}{\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}} \qquad \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

2. La ecuación de una curva plana se da en la forma implícita $F(x, y) = 0$. Demostrar que su curvatura es

$$\chi = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

donde

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad F_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad \text{etc.}$$

3. Conforme nos desplazamos a lo largo de una curva, la terna {**T**, **N**, **B**} va rotando. Demostrar que el ángulo vectorial de rotación $d\boldsymbol{\theta}$ que transforma dicha terna del punto "s" al punto "s + ds" es

$$d\boldsymbol{\theta} = \tau\, \mathbf{T} + \chi\, \mathbf{B}$$

(es decir, $\mathbf{T}(s + ds) = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{T}(s)$, etc.)

4. Demostrar las siguientes relaciones vectoriales:

(a) $\mathbf{T}' = (\mathbf{T} \bullet \nabla)\mathbf{T}$ (b) $\mathbf{T}' = -\mathbf{T} \times (\nabla \times \mathbf{T})$

(c) $\mathbf{T} \bullet (\nabla \times \mathbf{T}) - \mathbf{N} \bullet (\nabla \times \mathbf{N}) - \mathbf{B} \bullet (\nabla \times \mathbf{B}) = 2\tau$

(d) $\nabla \bullet \mathbf{T} = \mathbf{B} \bullet (\nabla \times \mathbf{N}) - \mathbf{N} \bullet (\nabla \times \mathbf{B})$

5. Considere una curva plana $\mathcal{C}$, descrita por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$.

Sea P_0 un punto fijo correspondiente al valor $u = u_0$, y P un punto variable correspondiente al valor $u = u_0 + \Delta u$. Tracemos las normales a la curva $\mathcal{C}$ por P_0 y P, suponiendo que se intersecan en Q. Demuestre que cuando $\Delta u \to 0$, el punto Q tiende hacia determinado punto C (denominado el *centro de curvatura* en el punto P_0), cuyas coordenadas son

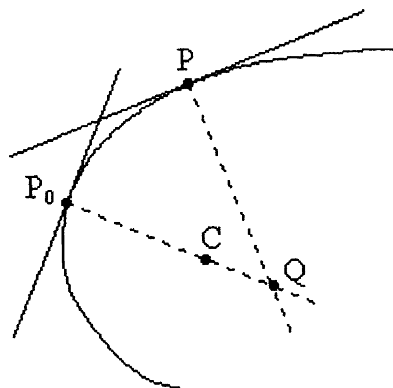


Fig. probl. 5

$$x_Q = x_0 - \frac{\dot{y}_0(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0} \qquad\qquad y_Q = y_0 + \frac{\dot{x}_0(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0}$$

donde $(x_0, y_0) = \mathbf{r}(u_0)$ y x_0 con el punto superior indica la derivada de x con respecto a u, evaluada en P_0.

6. Demostrar que para la hélice circular $\mathbf{r}(u) = a \cos u\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} u\, \mathbf{j} + bu\, \mathbf{k}$, donde a y b son constantes y "u" es el parámetro, se tiene

$$\chi = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \qquad \tau = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

8.2. SUPERFICIES

Sean ξ(u, v), ψ(u, v) y ζ(u, v) funciones de los parámetros u y v, definidas y continuas en alguna región $\mathcal{P}$ del plano uv. El conjunto de puntos (x, y, z) del espacio cartesiano XYZ, que se obtiene poniendo

$$(25) \qquad \begin{aligned} x &= \xi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \zeta(u, v) \end{aligned} \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

y suponiendo que el punto (u, v) recorre toda la región $\mathcal{P}$ del plano uv, se denomina una *superficie continua* $\mathcal{S}$ (Fig. 5).

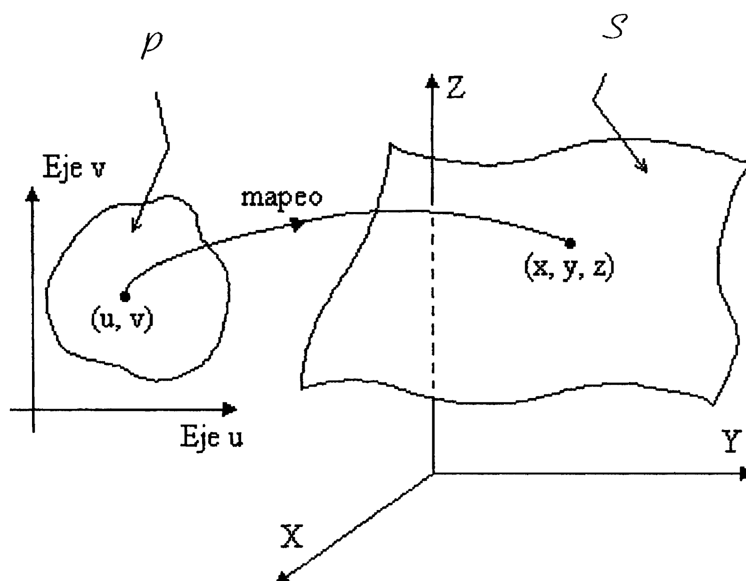


Fig. 5

Se trata aquí de un mapeo, mediado por las funciones ξ, ψ y ζ, desde el espacio bidimensional uv hasta el espacio tridimensional XYZ.

El concepto de superficie continua es demasiado general, y abarca casos de superficies "degeneradas" o "superficies" que no corresponden a nuestra idea intuitiva. Para excluir estos casos haremos las siguientes hipótesis:

- La región $\mathcal{P}$ es simplemente conexa, y su frontera es una curva simple, cerrada y lisa por segmentos.
- Las funciones ξ, ψ, ζ poseen derivadas continuas al menos de primer orden en todo punto de $\mathcal{P}$.
- El mapeo de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{S}$ es biunívoco: a cada punto de $\mathcal{P}$ le corresponde uno sólo de $\mathcal{S}$, y viceversa.

Al variar "u", manteniendo "v" constante en cierto valor v_0, la ecuación $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ representa una curva contenida en la superficie $\mathcal{S}$ (Fig. 6). Para diversos valores v_0, v_1, v_2, ..., etc., obtenemos una familia de curvas llamadas "*curvas* v". Análogamente definimos la familia de "*curvas* u", correspondiente al conjunto de representaciones paramétricas $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, v)$, ..., etc.

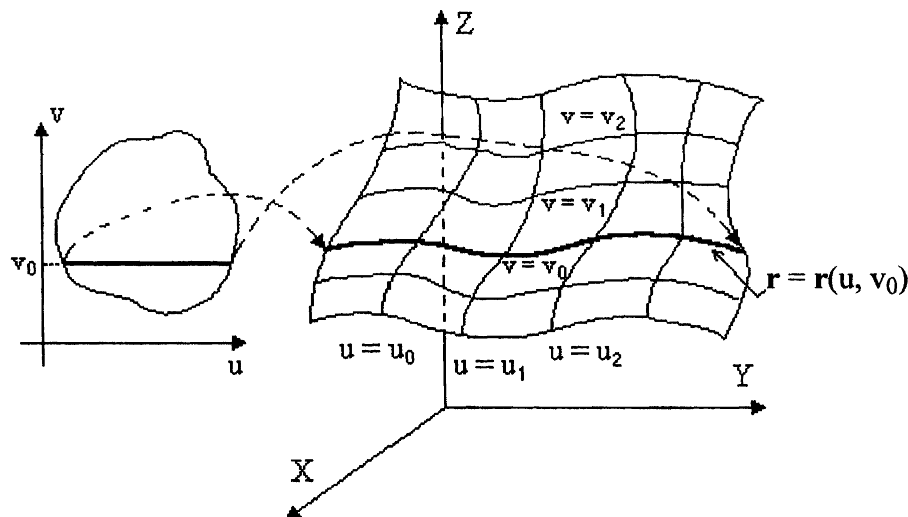


Fig. 6

Una curva de la familia "v" es la imagen (topológica) de los puntos de $\mathcal{P}$ que satisfacen la ecuación $v = v_0$, los cuales forman un segmento recto en el plano uv.

Si hacemos que u y v dependan ambas de otro parámetro "t", según ciertas funciones $u = u(t)$ y $v = v(t)$, de modo que

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)) = \mathbf{r}(t)$$

obtenemos una curva contenida en la superficie $\mathcal{S}$. Esta curva sería la imagen de otra curva en la región $\mathcal{P}$ del plano uv. En particular, una curva u se obtiene poniendo $u = u(t) =$ constante, y $v = v(t) = t$.

Los vectores tangentes a las curvas u y v son respectivamente

$$(26) \qquad \mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \qquad y \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Estos vectores tangentes, junto con el vector (normal a la superficie $\mathcal{S}$)

$$(27) \qquad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

forman una terna de vectores definida en todo punto de la superficie $\mathcal{S}$. En general, esta terna no es ortonormal.

La Fig. 7 muestra (a la izquierda) un pequeño rectángulo en el plano uv, de lados du y dv y "área" dudv. Este rectángulo es mapeado a un pequeño paralelogramo o "elemento de superficie" de $\mathcal{S}$ cuyos vértices corresponden a los valores (u, v), (u + du, v), (u, v + dv) y (u + du, v + dv).

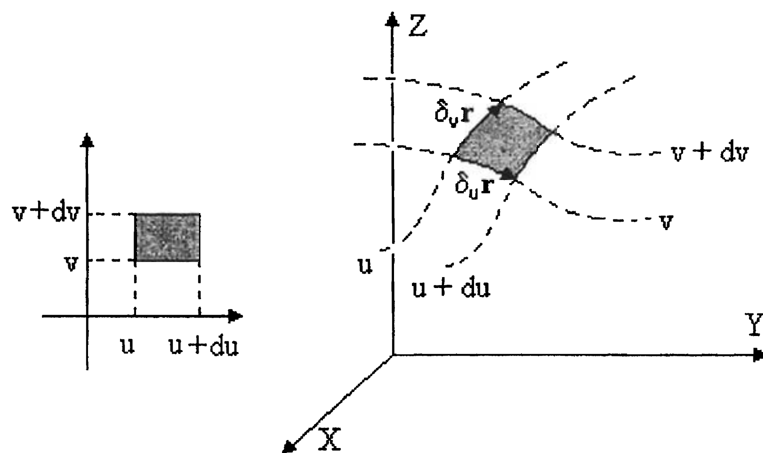


Fig. 7

El desplazamiento infinitesimal a lo largo de la curva v, es decir, desde el punto (u, v) hasta el punto (u + du, v), es

(28) $$\delta_u \mathbf{r} = \mathbf{r}(u + du, v) - \mathbf{r}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du = \mathbf{r}_u \, du$$

A lo largo de la curva u tenemos análogamente

(29) $$\delta_v \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v + dv) - \mathbf{r}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv = \mathbf{r}_v \, dv$$

El área del elemento de superficie de $\mathcal{S}$ es

(30) $$da = |\delta_u \mathbf{r} \times \delta_v \mathbf{r}| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dudv$$

El *elemento de área vectorial* se define por

(31) $$\mathbf{da} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dudv = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, dudv$$

La dirección de **da** es perpendicular al plano tangente a la superficie $\mathcal{S}$ en el punto considerado.

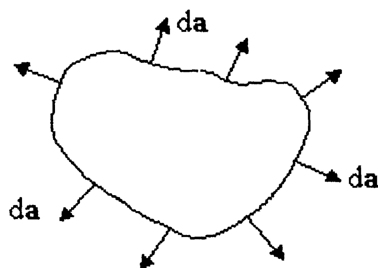


Fig. 8

Definiendo el vector unitario normal **n** pondremos

$$\mathbf{da} = \mathbf{n}\ da$$

Para una superficie cerrada la dirección de **n** se escoge convencionalmente hacia fuera de la región interior limitada por la superficie $\mathcal{S}$ (Fig. 8).

Ejemplo 4. Para superficies que poseen simetría rotacional con respecto al eje Z (superficies de revolución) podemos obtener una representación paramétrica conveniente como sigue: supongamos que la superficie es generada por la rotación de determinada curva plana $\mathcal{C}$ alrededor del eje Z. Sean (ρ, z) coordenadas cartesianas definidas en el plano meridiano que contiene a la curva generatriz $\mathcal{C}$, como vemos en la Fig. 9. El eje ρ está en el plano XY.

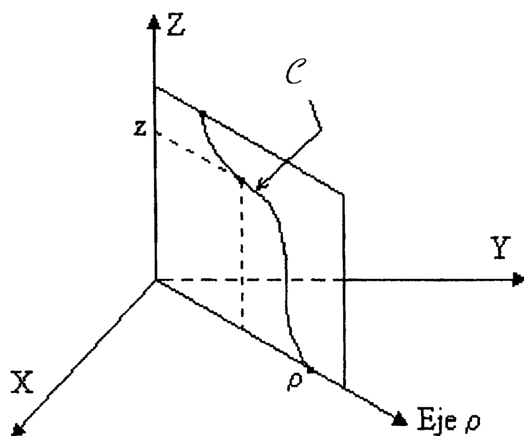


Fig. 9

Sea

$$\rho = \rho(u) \qquad z = z(u)$$

la representación paramétrica de $\mathcal{C}$ en el plano ρZ. Entonces la superficie de revolución quedará representada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \rho(u) \cos v$$

$$y = \rho(u) \operatorname{sen} v$$

$$z = z(u)$$

Los puntos de esta superficie, localizados a una misma altura sobre el plano XY, satisfacen

$$x = \rho(u_0) \cos v \qquad y = \rho(u_0) \operatorname{sen} v \qquad z = z(u_0) = z_0$$

y forman una circunferencia de radio $\rho(u_0)$.

Como ejemplo de esta clase de representación consideremos una superficie cónica generada por la rotación de una recta $\mathcal{C}$, como vemos en la Fig. 10.

Sean “a” y “h” el radio y la altura del cono, respectivamente.

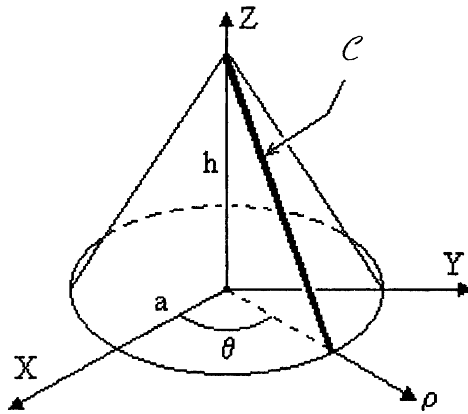


Fig. 10

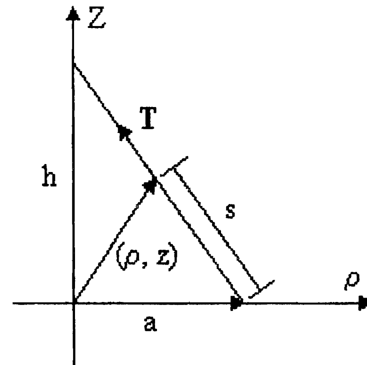


Fig. 11

Para representar paramétricamente a $\mathcal{C}$ en el plano ρZ escogemos como parámetro la longitud de arco “s”, medida desde el eje ρ a lo largo de $\mathcal{C}$ (Fig. 11). En el plano ρZ tenemos

$$(\rho, z) = (a, 0) + s\,\mathbf{T} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T} = \frac{(-a, h)}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

de donde

$$\rho = a\left(1 - \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right) = \rho(s) \qquad z = \frac{hs}{\sqrt{a^2 + h^2}} = z(s)$$

La representación paramétrica del cono será entonces

$$x = a\left(1 - \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right)\cos\theta = x(s, \theta)$$

$$y = a\left(1 - \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right)\operatorname{sen}\theta = y(s, \theta)$$

$$z = \frac{hs}{\sqrt{a^2 + h^2}} = z(s)$$

La generatriz “g” del cono es $\sqrt{a^2 + h^2}$, y θ es el ángulo que forman los ejes X y ρ, como vemos en la Fig. 11.

Las curvas s = *constante* son circunferencias cuyos planos son paralelos al plano XY; las curvas θ = *constante* son rectas que se intersecan en el vértice del cono (Fig. 12). Los vectores tangentes a estas curvas son

$$\mathbf{r}_s = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = -\frac{a}{g}\cos\theta\,\mathbf{i} - \frac{a}{g}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \frac{h}{g}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = a\left(1-\frac{s}{g}\right)(-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})$$

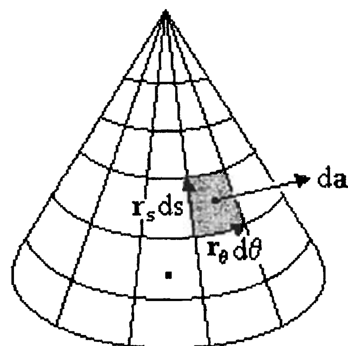


Fig. 12

Como $\mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_\theta = 0$, las curvas se intersecan perpendicularmente, esto es, los parámetros s y θ son "ortogonales".

El elemento de área vectorial del cono es

$$d\mathbf{a} = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_s\, d\theta ds = \frac{ah(g-s)}{g^2}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \frac{a}{h}\mathbf{k})d\theta ds$$

y su magnitud es

$$da = \frac{ah(g-s)}{g^2}\sqrt{1+\frac{a^2}{h^2}}d\theta ds = \frac{a(g-s)}{g}d\theta ds$$

Este resultado para "da" puede obtenerse también gráficamente, pues un lado del elemento de área es recto y de longitud "ds", y el otro lado es un arco de circunferencia de radio (Véase la Fig. 13)

$$(g-s)\operatorname{sen}\alpha = (g-s)\frac{a}{g}$$

y ángulo subtendido dθ.

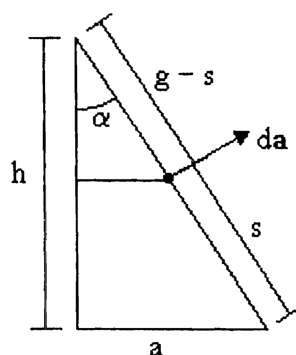


Fig. 13

8.3 Coordenadas curvilíneas

Sean $\xi(u, v, w)$, $\psi(u, v, w)$ y $\zeta(u, v, w)$ funciones definidas, continuas y con al menos primeras derivadas continuas en cierta región $\mathcal{B}$ del espacio cartesiano uvw. Consideremos un mapeo biunívoco de $\mathcal{B}$ a cierta región $\mathcal{R}$ del espacio cartesiano XYZ, dado por

(32) $x = \varphi(u, v, w)$ $y = \psi(u, v, w)$ $z = \chi(u, v, w)$

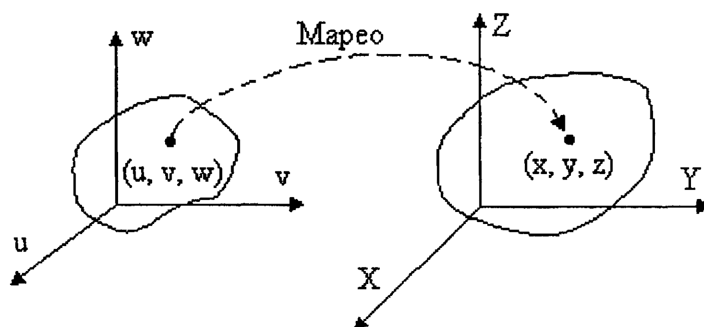


Fig. 14

Inviertiendo las ecuaciones (32) se tiene

$$u = \xi(x, y, z) \qquad v = \eta(x, y, z) \qquad w = \zeta(x, y, z)$$

Todo punto P(x, y, z) de $\mathcal{R}$ es también una terna de cantidades (u, v, w), que se obtiene de (33), y que se denominan las *coordenadas curvilíneas* de P.

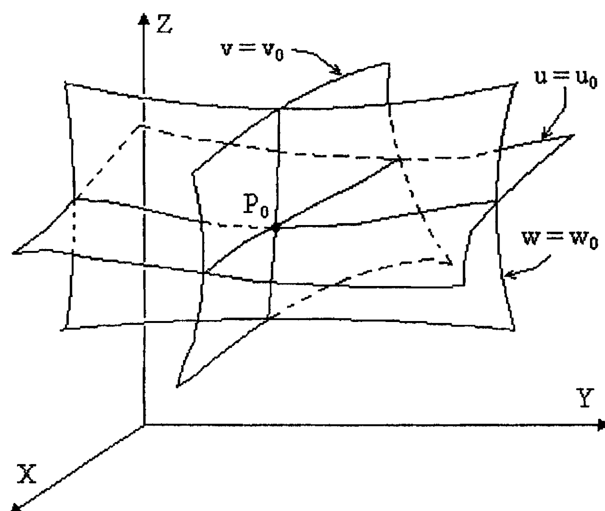


Fig. 15

Si mantenemos constante una de las coordenadas curvilíneas u, v, w, digamos $u = u_0$, obtenemos una superficie parametrizada por v y w, que llamaremos "superficie u_0".

$$x = \varphi(u_0, v, w)$$

$$y = \psi(u_0, v, w)$$

$$z = \chi(u_0, v, w)$$

Análogamente se obtienen las superficies v_0 y w_0. Estas tres superficies se intersecan en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Las superficies u_0 y v_0 se intersecan en una curva que pasa por P_0, denominada "curva u_0-v_0" y parametrizada por

$$x = \varphi(u_0, v_0, w) \qquad y = \psi(u_0, v_0, w) \qquad z = \chi(u_0, v_0, w)$$

Análogamente tenemos las curvas u_0-w_0 y v_0-w_0.

Los vectores tangentes a estas curvas son respectivamente

(33) $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \qquad \mathbf{r}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

Los desplazamientos infinitesimales a lo largo de estas curvas son

(34) $$\delta\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du \text{, etc.}$$

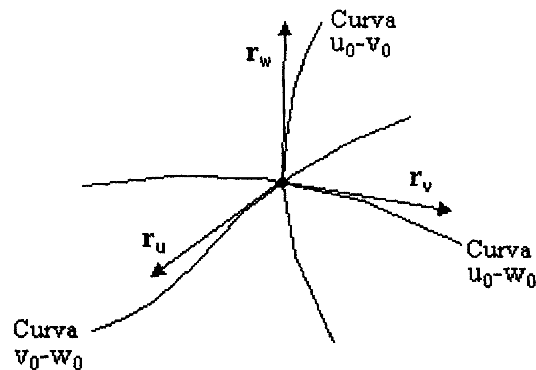


Fig. 16

Los puntos del espacio uvw contenidos en una pequeña región de volumen $d\omega$ = dudvdw son mapeados a una pequeña región del espacio XYZ, de volumen

$$dV = \delta_u\mathbf{r} \bullet \delta_v\mathbf{r} \times \delta_w\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dudvdw$$

Se denomina el *Jacobiano* de la transformación (x, y, z) → (u, v, w) al determinante

(35) $$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Los elementos de arco a lo largo de las curvas de la Fig. 16 son

(36) $$d_u s = |\delta_u \mathbf{r}| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| du = h_u du, \quad d_v s = h_v dv, \quad d_w s = h_w dw$$

donde se han definido los *factores de escala* h_u, h_v y h_w en la forma

(37) $$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| \qquad h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \qquad h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|$$

En cada punto del espacio XYZ definimos una base de vectores unitarios, formada por los vectores unitarios tangentes a las curvas parametrizadas por u, v y w, o sea

(38) $$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \qquad \mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \qquad \mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

En lo que sigue supondremos que dicha base es además ortogonal, en cuyo caso las coordenadas u,v,w se denominan *ortogonales*, y se cumplen las relaciones

(39) $$\mathbf{e}_u = \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w \qquad \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_w \times \mathbf{e}_u \qquad \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v$$

El plano tangente a una superficie $u = u_0$ está determinado por los vectores $\mathbf{e}_v$ y $\mathbf{e}_w$; la normal a dicho plano está en la dirección de $\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w$, es decir, en la dirección de $\mathbf{e}_u$, por lo que el gradiente ∇u es paralelo a $\mathbf{e}_u$. Para hallar el factor multiplicativo entre $\mathbf{e}_u$ y ∇u partimos de la identidad

$$u = \xi(x, y, z) = \xi(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w))$$

Derivándola con respecto a "u",

$$1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial u}$$

o bien, en notación más simple,

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

de donde se advierte la relación

$$1 = \nabla u \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \qquad \text{o sea, de (38),} \qquad 1 = \nabla u \bullet (h_u\, \mathbf{e}_u)$$

Poniendo $\mathbf{e}_u = c\, \nabla u$, donde "c" es el factor multiplicativo mencionado, y haciendo lo mismo con $\mathbf{e}_v$ y $\mathbf{e}_w$ obtenemos

(40) $$\mathbf{e}_u = h_u\, \nabla u \qquad \mathbf{e}_v = h_v\, \nabla v \qquad \mathbf{e}_w = h_w\, \nabla w$$

8.4 Operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas

Usaremos las relaciones derivadas en la sección precedente para obtener las expresiones de los operadores diferenciales gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano en coordenadas curvilíneas.

Consideremos una función $\phi(u, v, w)$. Su derivada direccional en la dirección del unitario $\mathbf{e}_u$, o sea la componente "u" del gradiente $\nabla\phi$, es

$$\frac{\text{cambio de } \phi \text{ entre } (u,v,w) \text{ y } (u+du,v,w)}{\text{distancia entre } (u,v,w) \text{ y } (u+du,v,w)} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial u}du}{|\delta_u \mathbf{r}|} =$$

$$= \frac{\frac{\partial\phi}{\partial u}du}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du\right|} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}$$

y análogamente para las otras dos componentes de $\nabla\phi$. Así pues, el gradiente es

(41) $$\nabla\phi = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\mathbf{e}_w$$

Para obtener la divergencia tenemos

$$\nabla \bullet \mathbf{A} = \nabla \bullet (A_u\,\mathbf{e}_u + A_v\,\mathbf{e}_v + A_w\,\mathbf{e}_w)$$

Calculemos $\nabla \bullet (A_u\,\mathbf{e}_u)$:

$$\nabla \bullet (A_u\,\mathbf{e}_u) = \nabla \bullet (A_u\,\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w) = \nabla \bullet (A_u\,h_v h_w\,\nabla v \times \nabla w) =$$

$$\nabla(h_v h_w A_u) \bullet (\nabla u \times \nabla v) + A_u h_v h_w\,\nabla \bullet (\nabla v \times \nabla w)$$

Pero $\nabla \bullet (\nabla v \times \nabla w) = 0$. Por lo tanto,

$$\nabla \bullet (A_u\,\mathbf{e}_u) = \nabla(h_v h_w A_u) \bullet (\nabla v \times \nabla w) =$$

$$= \frac{1}{h_v h_w}\nabla(h_v h_w A_u) \bullet \mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w A_u)$$

$\Rightarrow$

(42) $$\nabla \bullet \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w A_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v A_w)\right]$$

Para el rotacional tenemos

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (A_u\, \mathbf{e}_u + A_v\, \mathbf{e}_v + A_w\, \mathbf{e}_w) = \nabla \times (A_u\, h_u \nabla u + A_v\, h_v \nabla v + A_w\, h_w \nabla w)$$

$$= \nabla(A_u h_u) \times \nabla u + \nabla(A_v h_v) \times \nabla v + \nabla(A_w h_w) \times \nabla w$$

(Puesto que $\nabla \times \nabla u = 0$, etc.). Calculemos el primer término aplicando la fórmula (41) del gradiente a la función $A_u h_u$ y usando la relación $h_u \nabla u = \mathbf{e}_u$:

$$\nabla(A_u h_u) \times \nabla u = \left[\frac{1}{h_u} \frac{\partial(A_u h_u)}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial(A_u h_u)}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial(A_u h_u)}{\partial w} \mathbf{e}_w \right] \times \frac{\mathbf{e}_u}{h_u}$$

$$= \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial(A_u h_u)}{\partial v} \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial(A_u h_u)}{\partial w} \mathbf{e}_w \times \mathbf{e}_u$$

$$= -\frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial(A_u h_u)}{\partial v} \mathbf{e}_w + \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial(A_u h_u)}{\partial w} \mathbf{e}_v$$

Finalmente,

(43) $$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

Para obtener el laplaciano $\nabla^2 \phi$ calculamos la divergencia del gradiente, empleando las fórmulas (41) y (42). Resulta

(44) $$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) \right]$$

Problemas

1. Demostrar que la relación

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + u^2\, \mathbf{k}$$

representa paramétricamente un paraboloide de revolución, y que su elemento de área es

$$da = u\sqrt{1 + 4u^2}\, du dv$$

2. Demostrar que la ecuación

$$\mathbf{r} = a \cos\theta \sec\psi\, \mathbf{i} + b \operatorname{sen}\theta \sec\psi\, \mathbf{j} + c \tan\psi\, \mathbf{k}$$

representa un hiperboloide.

3. Demostrar que

$$\frac{\partial \mathbf{e}_u}{\partial u} = -\frac{1}{h_v}\frac{\partial h_u}{\partial v}\mathbf{e}_v - \frac{1}{h_w}\frac{\partial h_u}{\partial w}\mathbf{e}_w$$

4. Demostrar que para el sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas (u, v, w) dadas por

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \qquad y = uv \qquad z = w$$

el laplaciano tiene la forma

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{u^2 + v^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial w^2}$$

5. Describir la forma de las superficies u = constante, v = constante y w = constante para el sistema de coordenadas (u, v, w) dado por

$$x = a \cosh u \cos v \cos w$$

$$y = a \cosh u \cos v \operatorname{sen} w$$

$$z = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$$

CAPÍTULO 9	TEOREMAS INTEGRALES

9.1 Conexividad

En este capítulo estudiaremos los principales teoremas integrales de utilidad en la formulación de leyes físicas. Desde el principio debemos prestar atención especial a las singularidades de los campos. Una singularidad es un punto del espacio donde el campo no es analítico, es decir, no se puede desarrollar alrededor de ese punto en una serie de potencias de las variables de posición. Las singularidades de los campos pueden presentarse en puntos aislados, o en todos los puntos de una curva o una superficie (acotada o infinita), o en todos los puntos de una región acotada. La región de definición de un campo (donde el campo "existe") consta de todos aquellos puntos donde el campo es analítico y, por tanto, excluye las singularidades.

Empezaremos por clasificar las regiones de definición de los campos, introduciendo para ello el concepto de conexividad.

Definición. Una región espacial $\mathcal{R}$ es *conexa* si dos puntos cualesquiera de $\mathcal{R}$ pueden unirse por una curva continua contenida íntegramente en $\mathcal{R}$. Por ejemplo, las Fig. 1 y 2 ilustran dos regiones $\mathcal{R}$ conexas.

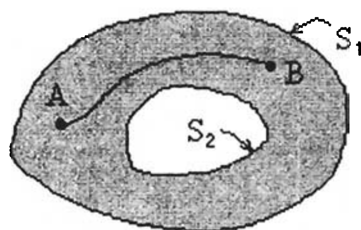


Fig. 1

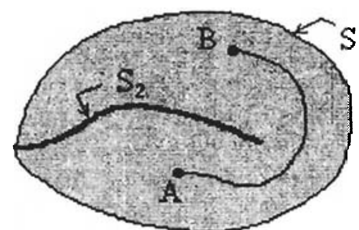


Fig. 2

En la Fig. 1, $\mathcal{R}$ es la región sombreada comprendida entre dos superficies cerradas S_1 y S_2. En la Fig. 2, $\mathcal{R}$ es la región sombreada que consta del interior de la superficie cerrada S_1, excluyendo los puntos de una superficie abierta S_2 contenida en S_1. En ambos casos es posible unir dos puntos cualesquiera A y B por una curva contenida íntegramente en $\mathcal{R}$.

Las Figs. 3 y 4 muestran dos casos de regiones $\mathcal{R}$ no conexas. En la Fig. 3, $\mathcal{R}$ es la unión de dos regiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ cuya intersección $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ es vacía. En la Fig. 4, $\mathcal{R}$ consta del interior de una superficie cerrada S_1, excluyendo los puntos de una superficie abierta S_2 que divide a la región $\mathcal{R}$ en dos partes; en este caso no es posible unir los puntos A y B mostrados mediante una curva cuyos puntos pertenezcan todos a $\mathcal{R}$, ya que para pasar de A a B es necesario atravesar la superficie S_2.



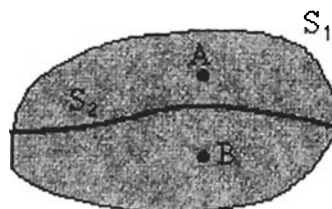
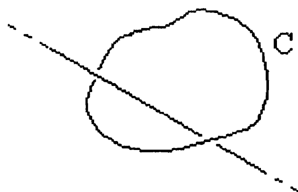
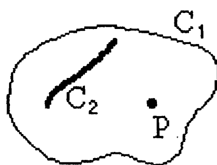


Fig. 3 **Fig. 4**

Definición. Una región espacial es *simplemente conexa* si toda curva cerrada, contenida enteramente en la región, puede ser deformada continua e internamente (es decir, de tal manera que en todo momento la curva conste de puntos contenidos en la región) hasta reducirse a un punto de la región.

Por ejemplo, las regiones ilustradas en las Figs. 1 y 2 son simplemente conexas. Si a todo el espacio le quitamos los puntos de coordenadas enteras (l, m, n), con l, m, n = 0, ± 1, ± 2, ± 3, …, etc., la región así obtenida es simplemente conexa. Si al espacio tridimensional le quitamos los puntos de una recta infinita, nos queda una región que no es simplemente conexa, puesto que una curva cerrada C que envuelva a esa recta (Fig. 5) no puede ser deformada continuamente a un punto sin cortar la recta.





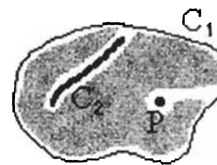


Fig. 5 **Fig. 6** **Fig. 7**

He aquí una definición equivalente particularizada a regiones planas:

Definición. Una región *plana* $\mathcal{R}$ es *simplemente conexa* si toda curva simple cerrada, contenida íntegramente en $\mathcal{R}$, posee la propiedad de que todos los puntos de la región interna limitada por dicha curva pertenecen también a $\mathcal{R}$.

Definición. Una región plana es *múltiplemente conexa*, con multiplicidad “n”, si su frontera consta de n curvas separadas (es decir, no encadenadas) que no se intersecan. Hay que incluir también puntos aislados que no pertenezcan a la región, pero que se encuentren en su interior.

Por ejemplo, en la Fig. 6, $\mathcal{R}$ es la región interna a la curva C_1, excluyendo los puntos de la curva C_2 y el punto aislado P. Esta región es múltiplemente conexa con multiplicidad 3. En la Fig. 7, la región sombreada es simplemente conexa.

9.2 La integral de línea

Sea $\phi(\mathbf{r})$ un campo escalar definido y continuo en cierta región $\mathcal{R}$. Sea $\mathcal{C}$ una curva lisa por segmentos, contenida íntegramente en $\mathcal{R}$, y parametrizada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$.

Consideremos un segmento de $\mathcal{C}$, limitado por los puntos A y B (Fig. 8), y hagamos una partición del mismo mediante n + 1 puntos correspondientes a valores en sucesión monótona del parámetro: $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_n$, con $\mathbf{r}(u_0) = \mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}(u_n) = \mathbf{r}_B$.

Denotemos el valor del campo en el punto $\mathbf{r}(u_i)$ con $\phi(\mathbf{r}(u_i)) = \phi(u_i)$ y pongamos $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$.

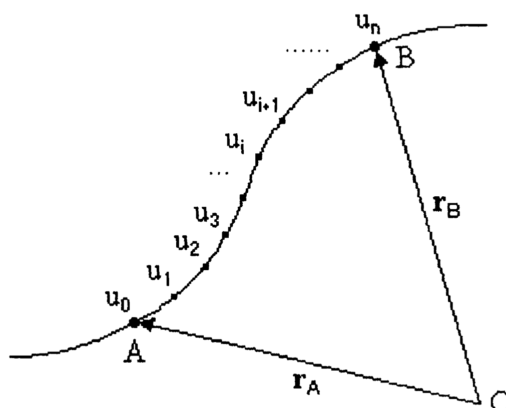


Fig. 8

Se define la integral de línea del campo ϕ, a lo largo de la curva $\mathcal{C}$, entre los puntos A y B, como la integral de Riemann

$$\text{(1)} \qquad \int_{u_0}^{u_n} \phi(u)du = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(u_i)\Delta u_i \qquad (\text{Máx } |\Delta u_i| \to 0)$$

Para una función vectorial de la posición, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (A_x(\mathbf{r}), A_y(\mathbf{r}), A_z(\mathbf{r}))$, se define la integral de línea como

$$\text{(2)} \qquad \int_{u_0}^{u_n} \mathbf{A}(\mathbf{r})du = \left(\int_{u_0}^{u_n} A_x du,\ \int_{u_0}^{u_n} A_y du,\ \int_{u_0}^{u_n} A_z du \right)$$

o sea, para obtener la integral de línea de un vector se integra cada componente cartesiana. En notación tensorial tenemos

$$\left(\int \mathbf{A}\, du\right)_i = \int A_i du$$

Hay muchas otras clases de integrales de línea. En todas ellas la región de integración es una curva $\mathcal{C}$, y el integrando puede ser en general un campo tensorial.

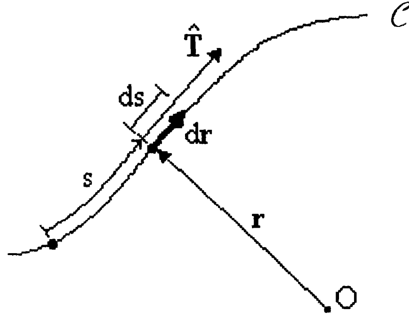


Fig. 9

Sea "s" la longitud de arco a lo largo de $\mathcal{C}$; ds el elemento de arco; **T** el vector unitario tangente; **r** un punto arbitrario de $\mathcal{C}$; **dr** el vector desplazamiento infinitesimal en **r** (con $|\mathbf{dr}| = ds$, véase la Fig. 9).

Sean $\phi(\mathbf{r})$, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ y $T_{ij}(\mathbf{r})$ campos de tipo escalar, vectorial, y tensorial de orden 2, respectivamente, definidos y continuos en una región $\mathcal{R}$ que contiene a la curva $\mathcal{C}$. Las siguientes son "integrales de línea":

(i) $\int \phi ds$ (ii) $\int \phi \, \mathbf{dr}$ (iii) $\int \mathbf{A} \, ds$

(iv) $\int \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr}$ (v) $\int \mathbf{A} \times \mathbf{dr}$ (vi) $\int T_{ij} ds$

(vii) $\int T_{ij} dx_j$ (viii) $\int \in_{ijk} T_{ij} dx_k$ Etc.

Los tipos (i), (iv) y (viii) dan un resultado escalar; los tipos (ii), (iii), (v), y (vii) un resultado vectorial, y el tipo (vi) un tensor de segundo orden.

Todas estas integrales pueden reducirse a la forma (1) o (2) mediante las relaciones

$$\mathbf{dr} = \frac{\mathbf{dr}}{du} du \qquad ds = \frac{ds}{du} du$$

donde

$$\frac{\mathbf{dr}}{du} = \left(\frac{dx(u)}{du}, \frac{dy(u)}{du}, \frac{dz(u)}{du} \right)$$

$$ds = |\,\mathbf{dr}\,| = \left| \frac{\mathbf{dr}}{du} \right| du = \sqrt{\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + \left(\frac{dz}{du} \right)^2} \, du$$

Por ejemplo, reduzcamos una integral del tipo (iv):

$$\int \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \int \mathbf{A}(x(u), y(u), z(u)) \bullet \frac{d\mathbf{r}}{du} du =$$

$$= \int (A_x(x(u), y(u), z(u)) \frac{dx}{du} du + A_y(x(u), y(u), z(u)) \frac{dy}{du} du + A_z(x(u), y(u), z(u)) \frac{dz}{du} du)$$

La integral de línea escalar $\int \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr}$ es la que aparece más frecuentemente en las aplicaciones. Su forma desarrollada es

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr} = \int_{\mathcal{C}} (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

Si la curva $\mathcal{C}$ es cerrada, se añade al signo de integral un pequeño círculo, como en

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr} \qquad \oint_{\mathcal{C}} \phi \, ds \qquad \text{etc.}$$

En particular, se denomina la *circulación* del campo vectorial **A**, a lo largo de la curva (cerrada) $\mathcal{C}$, a la integral

(3) $$\Gamma_A(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr}$$

en donde debemos especificar el sentido de integración a lo largo de $\mathcal{C}$.

Propiedades de la integral de línea.

Se entiende por el *sentido de integración*, a lo largo de la curva $\mathcal{C}$, el sentido que conduce desde el límite inferior hasta el límite superior de la integral considerada.



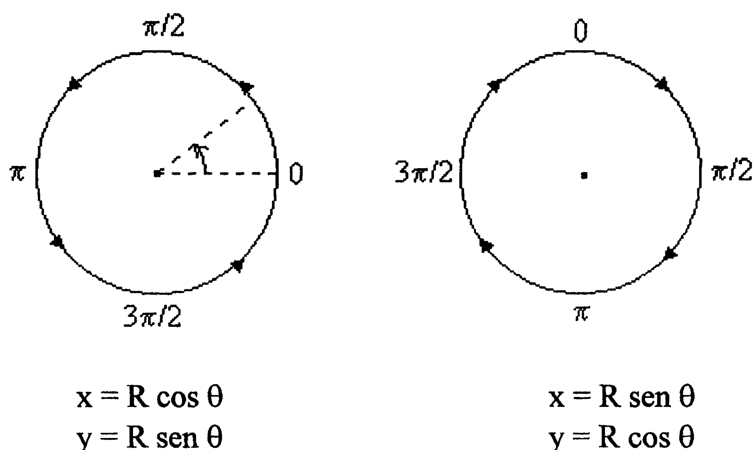
Fig. 10

En la Fig. 10 el sentido de integración en cada caso se muestra mediante puntas de flecha sobre la curva $\mathcal{C}$.

(A) Si se invierte el sentido de integración (misma cosa que invertir los límites de integración), la integral cambia de signo:

(4) $$_{\mathcal{C}}\int_A^B = -{}_{\mathcal{C}}\int_B^A$$

El *sentido de parametrización*, a lo largo de la curva $\mathcal{C}$, es el sentido que conduce a puntos correspondientes a *valores crecientes del parámetro*. En la Fig. 11, las flechas sobre la circunferencia indican el sentido de parametrización para dos parametrizaciones distintas de la misma.



$x = R \cos\theta$
$y = R \operatorname{sen}\theta$

$x = R \operatorname{sen}\theta$
$y = R \cos\theta$

Fig. 11

En el primer caso, al ir incrementando el parámetro θ, vamos obteniendo los puntos de la circunferencia conforme a un movimiento antihorario. La cosa se invierte en el segundo caso.

Obviamente, el sentido del vector **dr**, al igual que el del vector tangente $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, coincide con el sentido de parametrización, ya que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}(u + du) - \mathbf{r}(u)$, con $du > 0$.

(B) El valor de la integral de línea a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ no depende del modo de parametrización de $\mathcal{C}$. Demostrémoslo.

Sean $\mathbf{r} = \mathbf{f}(u)$ y $\mathbf{r} = \mathbf{g}(v)$ dos representaciones paramétricas diferentes de la misma curva $\mathcal{C}$, y sea $u = \psi(v)$ la relación entre los parámetros u y v. Debemos tener entonces

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(u) = \mathbf{f}(\psi(v)) = \mathbf{g}(v)$$

Sean A y B dos puntos de la curva $\mathcal{C}$, correspondientes a los valores u_1, v_1 y u_2, v_2, respectivamente. Consideremos algún tipo de integral de línea, digamos $\int_A^B \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$.

Se tiene, usando la representación "u",

$$\int_A^B \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{u_1}^{u_2} \phi(\mathbf{f}(u))\frac{d\mathbf{f}}{du}du$$

Pero $\phi(\mathbf{f}(u)) = \phi(\mathbf{f}(\psi(v))) = \phi(\mathbf{g}(v))$ y $du = \frac{d\psi}{dv}dv$, con lo que $\frac{d\mathbf{f}}{du}\frac{d\psi}{dv}dv = \frac{d\mathbf{g}}{dv}dv$. Por consiguiente,

$$\int_A^B \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{u_1}^{u_2} \phi(\mathbf{f}(u))\frac{d\mathbf{f}}{du}du = \int_{v_1}^{v_2} \phi(\mathbf{g}(v))\frac{d\mathbf{g}}{dv}dv$$

Esta relación significa que la integral no depende del modo de parametrización de $\mathcal{C}$. En particular, el valor de la integral tampoco depende del sentido de parametrización.

(C) Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, …, $\mathcal{C}_N$ curvas descritas por parámetros respectivos u_1, u_2, …, u_N, que varían en los intervalor $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_N, b_N]$. Supongamos que las curvas están encadenadas, es decir, que

$$\mathbf{r}(b_1) = \mathbf{r}(a_2) \qquad \mathbf{r}(b_2) = \mathbf{r}(a_3) \quad \ldots \qquad \mathbf{r}(b_{N-1}) = \mathbf{r}(a_N)$$

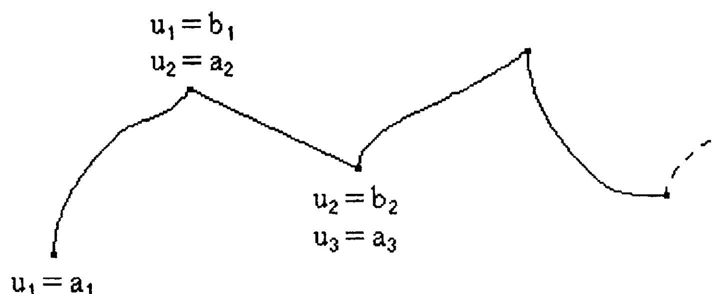


Fig. 12

Usaremos la notación $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \ldots + \mathcal{C}_N$ para designar a la curva $\mathcal{C}$ compuesta por los puntos de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, …, $\mathcal{C}_N$, y al mismo tiempo para indicar que el sentido de integración *debe ser "continuo"* a lo largo de las curvas $\mathcal{C}_i$.

La integral de línea es *aditiva*, esto es, cumple la propiedad

$$_{\mathcal{C}}\int_{a_1}^{b_N} = {}_{\mathcal{C}_1}\int_{a_1}^{b_1} + {}_{\mathcal{C}_2}\int_{a_2}^{b_2} + \ldots + {}_{\mathcal{C}_N}\int_{a_N}^{b_N}$$

En particular, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, …, $\mathcal{C}_N$ pueden ser segmentos consecutivos de una curva $\mathcal{C}$ descrita por un sólo parámetro u.

(D) Independencia de la integral de línea con respecto a la trayectoria.

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ curvas que enlazan unos mismos puntos A y B (Fig. 13). Supongamos cierta la igualdad

$$\int_{\mathcal{C}_1 A}^{B} = \int_{\mathcal{C}_2 A}^{B}$$

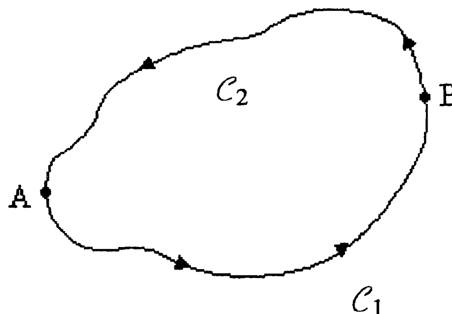


Fig. 13

Entonces la integral a lo largo de la curva cerrada $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ es nula (recuerde que el sentido de integración a lo largo de $\mathcal{C}$ es continuo). La demostración es inmediata:

$$\oint_{\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2} = \int_{\mathcal{C}_1 A}^{B} + \int_{\mathcal{C}_2 B}^{A} = \int_{\mathcal{C}_1 A}^{B} - \int_{\mathcal{C}_2 A}^{B} = 0$$

El recíproco también es válido:

Si $\oint_{\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2} = 0$ entonces $\int_{\mathcal{C}_1 A}^{B} = \int_{\mathcal{C}_2 A}^{B}$

9.3 EJEMPLOS

Ejemplo 1. Calcular el trabajo de un campo de fuerzas constante **F**, a lo largo de una curva arbitraria entre los puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$.

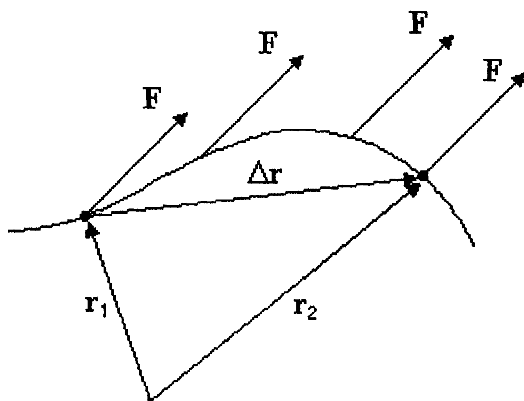


Fig. 14

El trabajo es igual a

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int F_i dx_i$$

$$= F_i \int dx_i = F_i (x_{2i} - x_{1i})$$

donde $x_{2i} = (\mathbf{r}_2)_i$ y $x_{1i} = (\mathbf{r}_1)_i$.

En notación simbólica,

$$W = \mathbf{F} \bullet (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{r}$$

donde $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es el desplazamiento entre los puntos terminales considerados.

Note que es válido poner

$$W = \int \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \mathbf{F} \bullet \left(\int d\mathbf{r}\right) = \mathbf{F} \bullet [\mathbf{r}]_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} = \mathbf{F} \bullet (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{r}$$

Ejemplo 2. Para el campo escalar $\varphi = 3x^2yz$, calcular la integral de línea $\int \varphi d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva parametrizada por $x = -2t^2$, $y = t^3$, $z = t$, desde el punto (–2, 1, 1) hasta el punto (–8, 8, 2).

Formulemos la integral, usando $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$:

$$\int \varphi d\mathbf{r} = \int 3x^2yz(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) =$$

$$= \mathbf{i} \int 3x^2yz\,dx + \mathbf{j} \int 3x^2yz\,dy + \mathbf{k} \int 3x^2yz\,dz$$

Los puntos límites de la integral corresponden a los valores t = 1 y t = 2. Sustituyendo x, y y z en términos del parámetro t, así como las relaciones

$$dx = -4t\,dt \qquad dy = 3t^2\,dt \qquad dz = dt$$

tenemos

$$3x^2yz = 3(-2t^2)^2(t^3)(t) = -12\,t^8$$

$$\int 3x^2yz\,dx = \int_1^2 -12t^8(-4t dt) = \int_1^2 48t^9 dt = \left[4.8t^{10}\right]_1^2 = 4910.4$$

$$\int 3x^2yz\,dy = \int_1^2 -12t^8(3t^2 dt) = \int_1^2 36t^{10} dt = \left[\frac{36}{11}t^{11}\right]_1^2 = 6699.273$$

$$\int 3x^2yz\,dz = \int_1^2 -12t^8(dt) = \left[\frac{12}{9}t^9\right]_1^2 = 681.333$$

$$\Rightarrow \qquad \int \varphi d\mathbf{r} = 4910.4\mathbf{i} + 6699.273\mathbf{j} + 681.333\mathbf{k}$$

Ejemplo 3. Indicar el cálculo de la integral de línea $\int \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$ para un campo bidimensional A(x, y), a lo largo de una curva descrita por la ecuación y = f(x).

$$\int \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \int \mathbf{A}(x,y) \bullet (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int A_x dx + A_y dy =$$

$$= \int A_x(x, f(x))dx + A_y(x, f(x))f'(x)dx$$

Se usó $y = f(x)$ y $dy = f'(x)dx$.

9.4 Teoremas de Gauss y Stokes en el plano

Sean $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ funciones continuas en $a \leq x \leq b$, tales que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ en todo ese intervalo. La región $\mathcal{P}$del plano XY que consta de todos los puntos (x, y) determinados por las desigualdades $a \leq x \leq b$ y $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$, se denomina una *región normal* con respecto del eje X (Fig. 15).

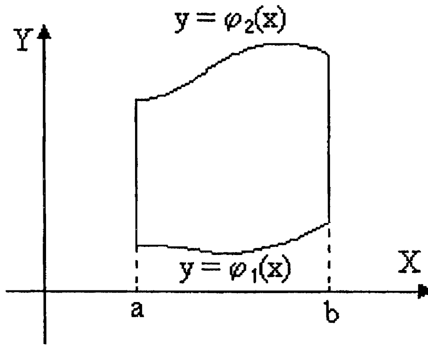


Fig. 15

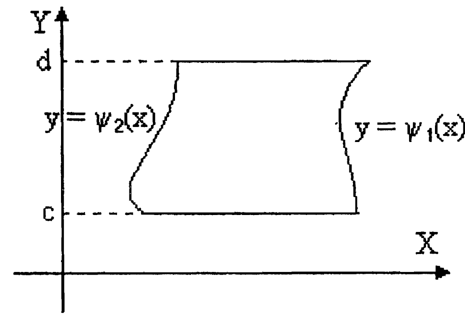


Fig. 16

Análogamente se define una región normal con respecto al eje Y (Fig. 16).

Teorema. Sea f(x, y) continua en la región normal $\mathcal{P}$ respecto al eje X. Entonces

$$\int_{\mathcal{P}} f(x,y)da = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

("da" es el elemento de área de la región $\mathcal{P}$; en la integral sobre "y" se considera "x" constante). Existe un teorema análogo para regiones normales con respecto al eje Y.
Estos teoremas son muy conocidos en el cálculo integral. Los aplicaremos enseguida.

Pasemos a la obtención de otros teoremas integrales, denominados teorema de Gauss y teorema de Stokes en el plano.

Sea $\mathcal{P}$ una región normal con respecto al eje X, limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$ y por las curvas lisas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ (Fig. 15). Denotemos por $C = C_1 + C' + C_2 + C''$ a la curva cerrada que es la frontera de $\mathcal{P}$. Sea $\xi(x, y)$ una función continua y de derivada continua $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ en $\mathcal{P}$. Por el teorema anterior tenemos

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \xi}{\partial y} da = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b \left[\xi(x,\varphi_2(x)) - \xi(x,\varphi_1(x)) \right] dx$$

$$= -\int_a^b \xi(x,\varphi_1(x))dx - \int_b^a \xi(x,\varphi_2(x))dx = -\int_{C_1} \xi \, dx - \int_{C_2} \xi \, dx$$

El segmento curvo C_1 puede representarse paramétricamente por

$$x = u \qquad y = \varphi_1(u)$$

y la integral de línea de la función $\xi(x, y)$ a lo largo de C_1 es precisamente $\int_a^b \xi(u, \varphi_1(u))du$, misma que la que aparece arriba. A lo largo de los segmentos rectos C' y C'' tenemos

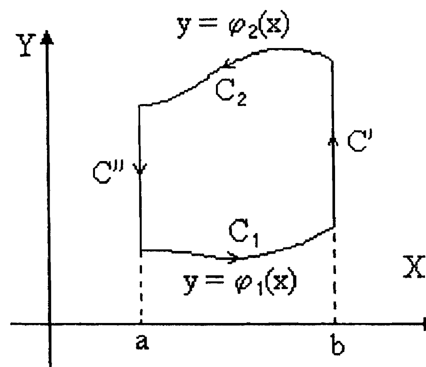


Fig. 17

$$\int_{C'} \xi \, dx = 0 \qquad y \qquad \int_{C''} \xi \, dx = 0$$

puesto que x = constante y dx = 0 en ellos. Resulta entonces

(5) $$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \xi}{\partial y} da = -\oint_{\mathcal{C}} \xi \, dx$$ (Sentido de integración antihorario).

Este resultado se puede extender a regiones $\mathcal{P}$ que pueden descomponerse en un número finito de regiones normales, como la región P mostrada en la Fig. 18.

Aquí, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, donde las subregiones $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$ son normales. Al sumar las integrales de línea sobre las curvas fronteras de estas tres subregiones se cancelan las contribuciones provenientes de los segmentos rectos, porque son recorridas en ambos sentidos, restando una integral de línea sobre la curva frontera de la región $\mathcal{P}$.

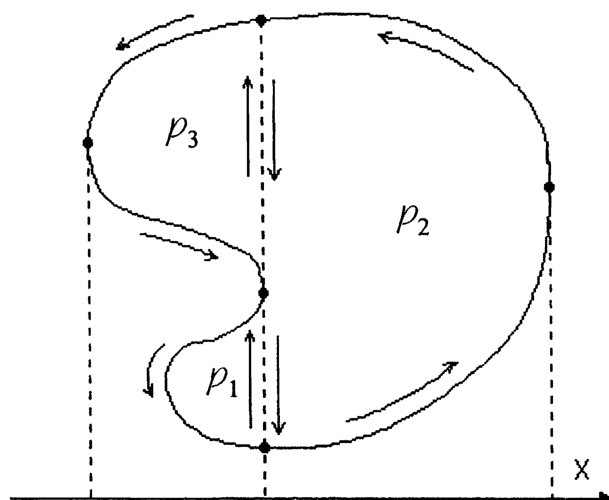


Fig. 18

De manera análoga se demuestra la relación

(6) $$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \eta}{\partial x} da = \oint_{\mathcal{C}} \eta \, dy$$

(Sentido de integración antihorario)

Usando (5) y (6) formemos estas combinaciones especiales de derivadas:

(7) $$\iint_{\mathcal{P}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)da=\oint_{\mathcal{C}}(-\eta\ dx+\xi dy)$$

(8) $$\iint_{\mathcal{P}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)da=\oint_{\mathcal{C}}(\xi\ dx+\eta dy)$$

Para comparación posterior escribiremos (7) y (8) en notación vectorial. Definimos

(9) $$\mathbf{A}(x, y)=\xi(x, y)\,\mathbf{i}+\eta(x, y)\mathbf{j}$$

y ponemos

(10) $$\mathbf{dr}=dx\ \mathbf{i}+dy\ \mathbf{j} \qquad \hat{\mathbf{n}}=\frac{dy\,\mathbf{i}-dx\,\mathbf{j}}{ds}$$

donde **dr** está a lo largo de la curva C, y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario definido a lo largo de C, perpendicular a **dr** (Fig. 19).

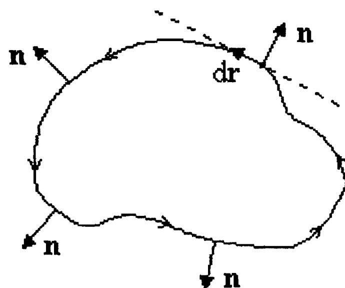


Fig. 19

Las ecuaciones (7) y (8) se convierten en

(11) $$\iint_{\mathcal{P}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)da=\oint_{\mathcal{C}}(A_x dy-A_y dx)$$

(12) $$\iint_{\mathcal{P}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)da=\oint_{\mathcal{C}}(A_x dx+A_y dy)$$

Podemos escribirlas en estas otras formas:

TEOREMA DE GAUSS EN EL PLANO.

(13) $$\int_{\mathcal{P}} \nabla \bullet \mathbf{A}\, da = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{A} \bullet \hat{\mathbf{n}})\, ds = \oint_{\mathcal{C}} A_n\, ds$$

TEOREMA DE STOKES EN EL PLANO.

(14) $$\int_{\mathcal{P}} (\nabla \times \mathbf{A})_z\, da = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} A_t\, ds$$

donde A_t y A_n son las componentes tangencial y normal del campo **A**.

Los teoremas de Gauss y Stokes son aplicables a regiones cuya frontera consiste de varias curvas cerradas (Fig. 20). El sentido de integración y la dirección del vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ deben tomarse como se indica en la Fig. 20.

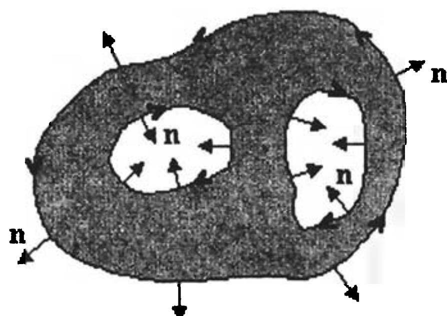


Fig. 20

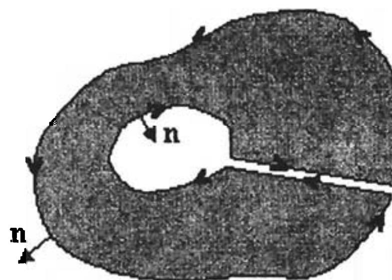


Fig. 21

Para demostrarlo basta con hacer un corte que nos lleva desde la frontera o curva "exterior" a una frontera "interior", como se ve en la Fig. 21. Las integrals de A_t y A_n a lo largo del corte se cancelan. La frontera "interior" se recorre en sentido opuesto al de la exterior.

9.5 CAMPOS CONSERVATIVOS PLANOS

Existe una clase importante de campos vectoriales A(x, y) llamados campos *conservativos*, para los cuales la integral de línea de A alrededor de toda curva cerrada es igual a cero. En otros términos, la integral entre dos puntos P y Q no depende del camino o trayectoria de integración.

El teorema de Stokes en el plano, ecuación (14), nos permite dar las condiciones que debe cumplir el campo **A** para que su circulación valga cero. En primer lugar, para que la integral de línea del lado derecho de (12) pueda expresarse como una integral sobre su

región plana interna $\mathcal{R}$, las derivadas parciales $\dfrac{\partial A_y}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial A_x}{\partial y}$ deben existir y ser continuas en $\mathcal{R}$; en particular, la frontera $\mathcal{C}$ no debe incluir puntos donde existan singularidades del campo. Requerimos entonces que la frontera pertenezca a una región *simplemente conexa*. En segundo lugar se requiere que $\dfrac{\partial A_y}{\partial x} = \dfrac{\partial A_x}{\partial y}$ o sea $(\nabla \times \mathbf{A})_z = 0$ en todos los puntos de la región $\mathcal{R}$.

Ahora bien, es posible demostrar que si la circulación de **A** es cero en toda curva $\mathcal{C}$ contenida en una región $\mathcal{R}$, entonces el campo puede expresarse como el gradiente de alguna función escalar $\phi(x, y)$, donde ϕ es precisamente la integral extendida desde algún punto fijo (punto de referencia) $P_0(x_0, y_0)$ hasta el punto $P(x, y)$, a lo largo de cualquier trayectoria que una P_0 y P.

TEOREMA.

Sea **A**(x, y) un campo vectorial definido, y con derivadas continuas, en una región $\mathcal{R}$ simplemente conexa, y sea $\mathcal{C}$ cualquier curva cerrada contenida en esta región. Entonces,

$$\text{(a)}\ (\nabla \times \mathbf{A})_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(b)}\ \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(c)}\ \mathbf{A} = \nabla\phi$$

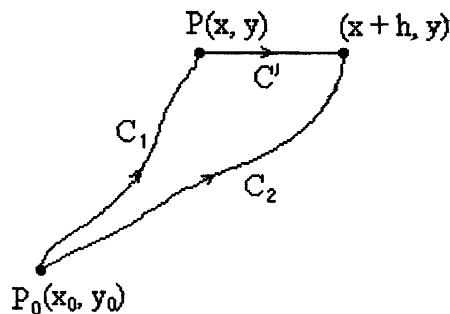
Demostración.

(a) ⇒ (b)

Esta implicación se sigue del teorema de Stokes, ecuación (14).

(b) ⇒ (c)

Por hipótesis, $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = 0$, de tal manera que la integral de línea $\int_{P_0}^{P} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$ entre un punto fijo $P_0(x_0, y_0)$ y un punto arbitrario P(x, y) no depende del camino. Podemos entonces definir una *función* de la posición por



$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$$

Fig. 22

Ahora bien,

$$\phi(x + h, y) - \phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x+h,y)} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} - \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$$

Para evaluar la última integral escojamos como camino de integración el segmento recto, paralelo al eje X, cuyos extremos son los puntos (x, y) y (x + h, y) (Véase la Fig. 22). En este segmento, $\mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = A_x\, dx$, y por el teorema del valor medio,

$$\phi(x+h,y) - \phi(x,y) = \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = hA_x(x+\theta h,\ y)$$

donde $0 < \theta < 1$. Haciendo $h \to 0$ obtenemos

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h,y) - \phi(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} A_x(x+\theta\, h, y) = A_x$$

Análogamente se demuestra que

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = A_y$$

con lo que

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = \nabla\phi \qquad \text{QED}$$

Las implicaciones (b) $\Rightarrow$ (a) y (c) $\Rightarrow$ (b) se dejan como ejercicio.

Ejemplo 4. Consideremos el campo vectorial bidimensional

$$\mathbf{A}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$$

definido en todo el plano XY *excepto en el origen* (0, 0). Queremos evaluar la circulación del campo **A**.

Notemos lo siguiente:

- La región de definición del campo *no es simplemente conexa.*
- El vector $\mathbf{r}_\perp = (-y, x)$ es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r} = (x, y)$, y se tiene que $|\mathbf{r}_\perp| = x^2 + y^2 = r$, de tal modo que el campo se puede escribir así:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}_\perp}{r} = \hat{\mathbf{r}}_\perp$$

El campo es unitario en todo el plano.

- Las líneas de campo son circunferencias cuyo centro común está en el origen.

- El campo se puede escribir como un gradiente en la forma

$$\mathbf{A} = \nabla\left(\text{angtan}\,\frac{y}{x}\right)$$

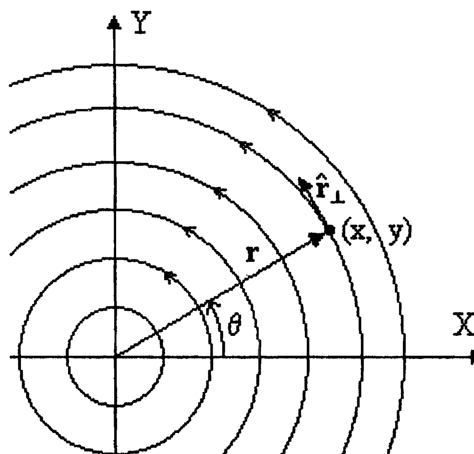


Fig. 23

o bien $\mathbf{A} = \nabla\theta$, con $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Tendremos entonces que

$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla\theta) = 0$ en todo el plano excepto el origen, donde el campo no posee derivadas.

De acuerdo con el teorema de Stokes en el plano, ecuación (14), la circulación del campo **A** valdrá cero a lo largo de cualquier curva *que no encierre al origen*, como la mostrada en la Fig. 24. Es fácil verificarlo, usando $\mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \nabla\theta \bullet d\mathbf{r} = d\theta$:

$$\oint_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \left({}_C\!\int_A^B + {}_C\!\int_B^A\right)\mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = {}_C\!\int_A^B d\theta + {}_C\!\int_B^A d\theta =$$

$$= (\theta_B - \theta_A) + (\theta_A - \theta_B) = 0$$

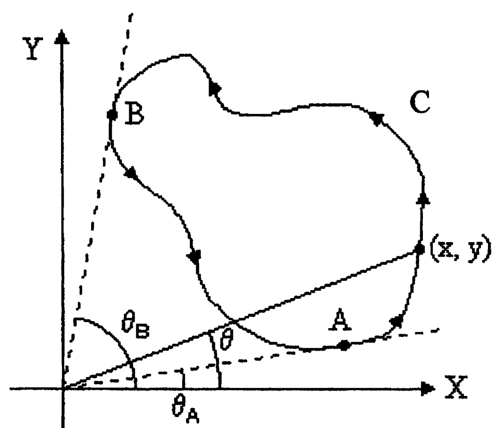


Fig. 24

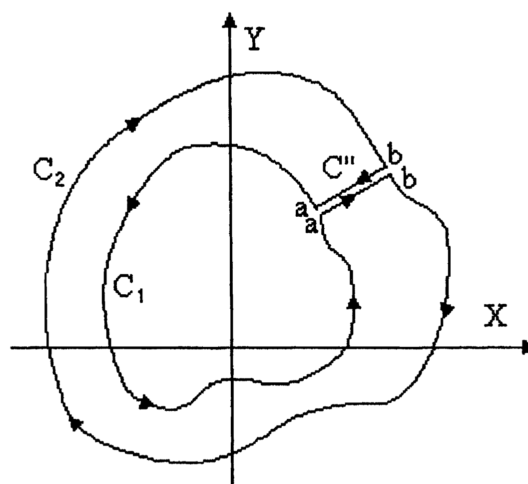


Fig. 25

En el caso de curvas que contengan al origen, como las curvas C_1 y C_2 ilustradas en la Fig. 25, podemos demostrar que la circulación a lo largo de todas ellas vale 2π. Apliquemos el teorema de Stokes a la curva cerrada compuesta así:

$$C = C_1 + C'' + C_2 + C'' \qquad \text{(sentido de integración continuo)}$$

Como C no contiene al origen podemos aplicar el teorema de Stokes y poner

$$0 = \oint_C = \oint_{C_1} + {}_{C''}\int_a^b + \oint_{C_2} + {}_{C''}\int_b^a = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$$

(Las integrales sobre C'' se cancelan)

$$\Rightarrow \qquad \oint_{C_1} = -\oint_{C_2} \qquad \text{o bien} \qquad \oint_{C_1} = \oint_{C_2}$$

si C_1 y C_2 se integran en el mismo sentido de integración. Por otra parte,

$$\oint_{C_1} \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr} = \oint_{C_1} \nabla\theta \bullet \mathbf{dr} = \oint_{C_1} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

9.6 Teoremas de Gauss y Stokes en el espacio tridimensional

Sea $\mathcal{R}$ una región espacial convexa, limitada por una superficie cerrada $\mathcal{S}$, y sea $\mathcal{P}$ la proyección de $\mathcal{S}$ sobre el plano XY (Fig. 26).

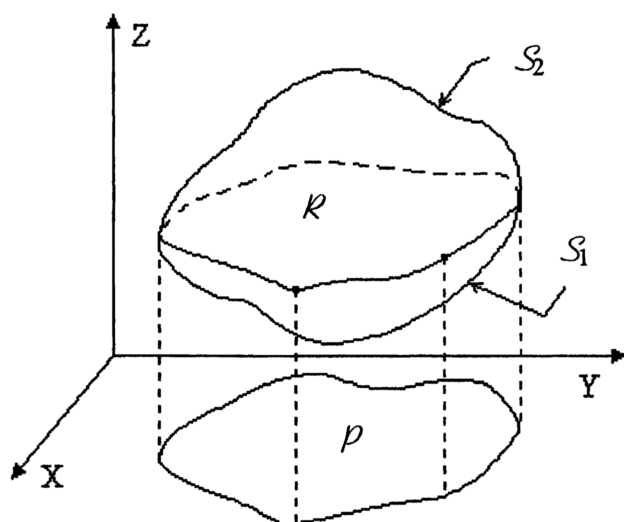


Fig. 26

Pongamos $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, donde $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ se describen mediante

$\mathcal{S}_1$: $\quad z = \varphi_1(x, y)$

$\mathcal{S}_2$: $\quad z = \varphi_2(x, y)$

Sea $\zeta(x, y, z)$ una función con derivadas continuas en $\mathcal{R}$ y consideremos la integral de volumen

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \zeta}{\partial z} dxdydz$$

Se puede integrar sobre la variable "z", dando

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \zeta}{\partial z} dxdydz = \int_{\mathcal{P}} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz \right) dxdy = \int_{\mathcal{P}} \left[\zeta(x, y, \varphi_2(x,y)) - \zeta(x, y, \varphi_1(x,y)) \right] dxdy$$

El vector $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \varphi_2(x, y)\mathbf{k}$ representa paramétricamente a $\mathcal{S}_2$, con x y y haciendo la función de parámetros. El elemento de área de $\mathcal{S}_2$ es

$$d\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dxdy = \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dxdy$$

de modo que $dxdy = d\mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{k} = da_{2z}$, y

$$\int_{\mathcal{P}} \zeta(x, y, \varphi_2(x,y)) dxdy = \int_{\mathcal{S}_2} \zeta \, da_{2z}$$

Análogamente tenemos

$$\int_{\mathcal{P}} \zeta(x, y, \varphi_1(x,y)) dxdy = \int_{\mathcal{S}_1} \zeta \, da_{1z}$$

Es fácil ver que $\mathbf{da}_2$ apunta hacia el exterior de $\mathcal{R}$, y $\mathbf{da}_1$ hacia el interior. Definiendo el elemento de área sobre $\mathcal{S}$ de modo que apunte siempre hacia fuera de la región $\mathcal{R}$,

$$\mathbf{da} = \begin{cases} \mathbf{da}_2 & \text{sobre } \mathcal{S}_2 \\ \mathbf{da}_1 & \text{sobre } \mathcal{S}_1 \end{cases}$$

obtenemos como resultado

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \zeta}{\partial z} dV = \oint_{\mathcal{S}} \zeta \, da_z$$

De modo similar se deducen las expresiones

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \xi}{\partial x} dV = \oint_{\mathcal{S}} \xi \, da_x$$

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \psi}{\partial y} dV = \oint_{\mathcal{S}} \psi \, da_y$$

Combinando las tres relaciones anteriores obtenemos estos teoremas importantes:

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla\phi \, dV = \oint_{\mathcal{S}} \phi \, \mathbf{da}$$

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \bullet \mathbf{A} \, dV = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \bullet \mathbf{da}$$

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \times \mathbf{A} \, dV = -\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \times \mathbf{da}$$

Aunque a los tres se les llama colectivamente "Teorema de Gauss", esta denominación muchas veces se reserva para la segunda forma, en la que interviene la divergencia del campo vectorial **A**. Los tres teoremas se pueden resumir en éste:

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla * (...) \, dV = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{da} * (...)$$

donde el asterisco "*" indica ya sea producto normal ($\nabla\phi$), producto escalar ($\nabla\bullet\mathbf{A}$) o producto vectorial ($\nabla\times\mathbf{A}$) y el paréntesis (…) aloja una función escalar, un campo vectorial o un campo vectorial, respectivamente.

Ejemplo 4. Una interpretación física del teorema de Gauss.

Consideremos el campo de velocidades de un fluido, **v**(x, y, z). Sea $\mathcal{R}$ un "volumen material" (región ocupada por un conjunto invariable de partículas) y $\mathcal{S}$ su frontera cerrada. Sea $\mathcal{S}'$ la frontera de la región $\mathcal{R}'$ que ocupan las mismas partículas en un instante posterior (Fig. 27).

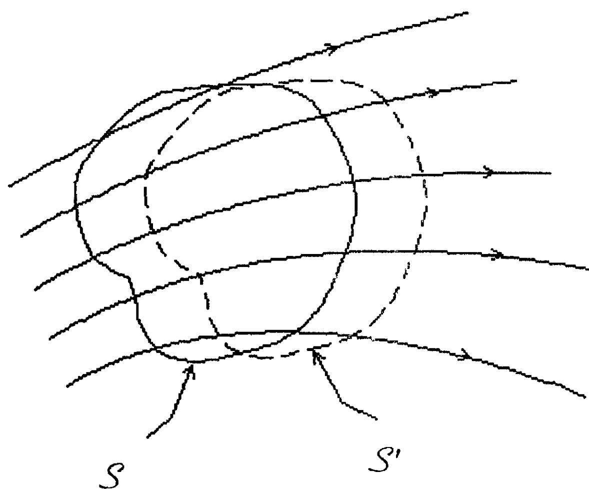


Fig. 27

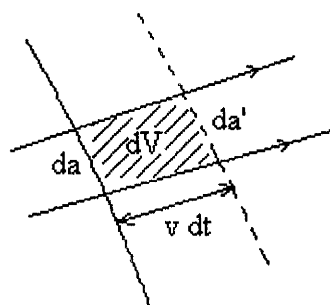


Fig. 28

En el tiempo "dt", el volumen δV barrido por el elemento "da" de $\mathcal{S}$ es (Fig. 28)

$$\delta V = \mathbf{v} \bullet \mathbf{da}\ dt$$

El volumen neto barrido por toda la frontera durante el mismo lapso es

(r1) $$\Delta V = \left(\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \bullet \mathbf{da} \right) dt$$

Por otra parte, este volumen debe ser igual al incremento de volumen de la región $\mathcal{R}$ durante ese lapso, el cual viene dado por

(r2) $$\Delta V = \left(\int_{\mathcal{R}} \nabla \bullet \mathbf{v}\ dV \right) dt$$

(puesto que, por (7-38), $\nabla \bullet \mathbf{v} = (\delta V' - \delta V)/(\delta V\ dt)$ es el incremento de volumen del elemento δV por unidad de volumen y tiempo. Igualando (r1) y (r2) y cancelando dt obtenemos el teorema de Gauss.

Ejemplo 5. Una interpretación física del teorema

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla\phi\, dV = \int_{\mathcal{S}} \phi\, d\mathbf{a}$$

Consideremos un fluido ideal en reposo. Sea p(x, y, z) la presión hidrostática, y tomemos un elemento de fluido con forma prismática, con sus caras paralelas a los planos coordenados y de volumen dxdydz (Fig. 29).

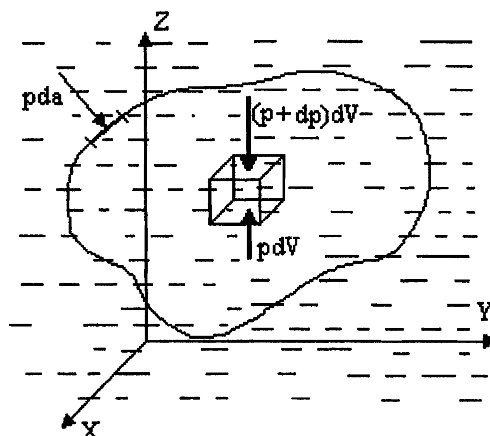


Fig. 29

La fuerza neta sobre las caras paralelas al plano XY es

$$[-\,p(x, y, z + dz) + p(x, y, z)]\; dx\, dy = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx\, dy = -\frac{\partial p}{\partial z} dV$$

Añadiendo las fuerzas netas sobre las otras caras tenemos para la fuerza neta sobre el elemento dV

$$d\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k}\right) dV = -\,\nabla p\; dV$$

La fuerza total **F** sobre todos los elementos de volumen contenidos en $\mathcal{R}$ es la integral de d**F**. Por la tercera ley de Newton, esta fuerza se va "transmitiendo" de elemento a elemento hasta llegar a la frontera $\mathcal{S}$ (tal como se transmite, por ejemplo, la tensión a lo largo de un hilo). Entonces podemos igualar la fuerza total **F** a la fuerza total sobre los elementos de área d**a**, la cual es $-\oint p\, d\mathbf{a}$. Obtenemos el teorema integral $\int_{\mathcal{R}} \nabla p\, dV = \int_{\mathcal{S}} p\, d\mathbf{a}$.

Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ la representación paramétrica de la superficie S, la cual es la imagen de cierta región P_{uv} del plano uv, limitada por la curva cerrada C_{uv} (Fig. 31).

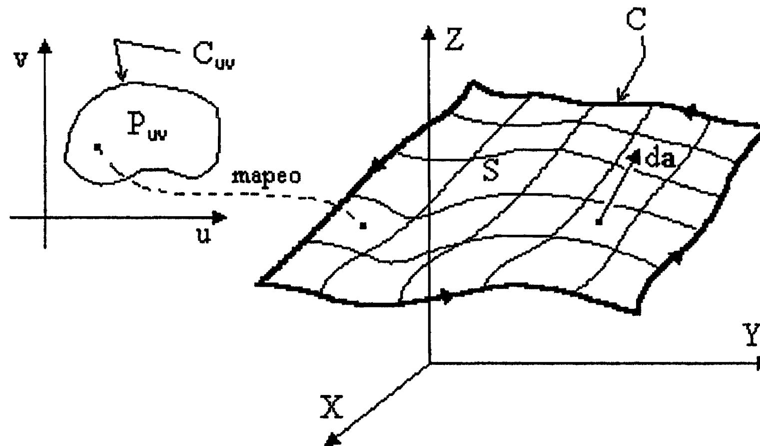


Fig. 31

La imagen de C_{uv} es la frontera C de S. Tenemos

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \bullet d\mathbf{a} = \int_{P_{uv}} (\nabla \times \mathbf{A}) \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dudv = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} \int_{P_{uv}} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_l}{\partial u} \frac{\partial x_m}{\partial v} dudv$$

$$= \int_{P_{uv}} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial v} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) dudv = \int_{P_{uv}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\mathbf{A} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\mathbf{A} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) \right] dudv$$

Aplicando el teorema de Stokes en el plano uv, ecuación (8), con

$$\eta = \mathbf{A} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad \text{y} \quad \xi = \mathbf{A} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

tenemos

$$\int_{P_{uv}} (\nabla \times \mathbf{A}) \bullet d\mathbf{a} = \oint_{C_{uv}} \left(\mathbf{A} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \mathbf{A} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right) = \oint_{C_{uv}} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$$

ya que $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv = d\mathbf{r}$ es el desplazamiento infinitesimal a lo largo de la curva C_{uv}, el cual tiene por imagen el desplazamiento infinitesimal

$$\mathbf{dr} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}dy = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$$

a lo largo de C, la frontera de S. Ahora bien, en virtud de que la imagen de la integral $\oint_{C_{uv}} \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr}$ es $\oint_{C} \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr}$, obtenemos el teorema de Stokes,

(20) $$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \bullet \mathbf{da} = \oint_C \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr}$$

Los siguientes teoremas están asociados al teorema de Stokes,

(21) $$\int_S \mathbf{da} \times \nabla\phi = \oint_C \phi\,\mathbf{dr}$$

(22) $$\int_S (\mathbf{da} \times \nabla) \times \mathbf{A} = \oint_C \mathbf{A} \times \mathbf{dr}$$

Tomando en cuenta la igualdad

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \bullet \mathbf{da} = (\mathbf{da} \times \nabla) \bullet \mathbf{A}$$

podemos escribir los teoremas (20), (21) y (22) en uno sólo:

(23) $$\int_S (\mathbf{da} \times \nabla) * (...) = \oint_C (...) * \mathbf{dr}$$

donde el asterisco * indica producto ordinario, escalar o vectorial, y (…) indica respectivamente una función escalar, una función vectorial y una función vectorial.

9.7 Potencial escalar y potencial vectoriai

Para el espacio tridimensional existe un teorema análogo al teorema expuesto en la sección 5 para el caso plano:

(24) $$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{C} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \nabla\phi$$

Según el teorema de Stokes, ecuación (20), para que $\nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$ implique $\oint_{C} \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr} = 0$, la curva C debe ser la frontera de una superficie S sobre la que el rotacional no posea singularidades.

Por ejemplo, para el campo de un "hilo de vorticidad", dado por

$$\mathbf{A}(P) = \lambda \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{R}}{R^2}$$

(Véase la Fig. 32), tenemos que el rotacional vale cero en todas partes *excepto* en los puntos del eje **e**, en donde **R** = 0 y **A** es infinito. Ello ocasiona que no se cumpla el teorema de Stokes para ninguna superficie S tendida sobre la curva C. De hecho resulta

$$\oint_{C} \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr} = 2\pi\lambda \neq 0$$

(El campo es esencialmente el mismo que el del ejemplo 4 en la página 16). Si el hilo de vorticidad no corta la superficie S considerada, sí es válido el teorema de Stokes.

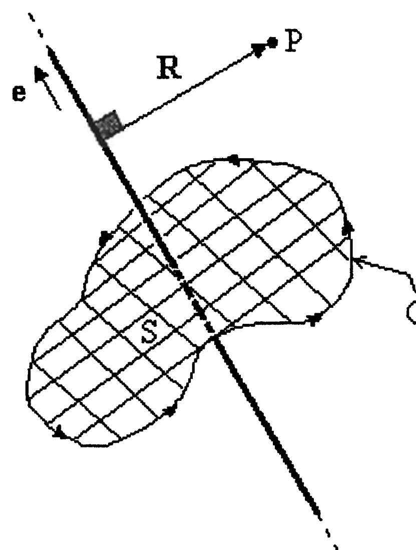


Fig. 32

Según las relaciones (24), un campo irrotacional (o sea tal que $\nabla \times \mathbf{A} = 0$) posee un potencial escalar $\phi(x, y, z)$, tal que el campo viene dado por $\mathbf{A} = \nabla\phi$. Resolveremos ahora el siguiente problema:

Dado el campo A(x, y, z), hallar su potencial escalar $\phi(x, y, z)$

Se trata de calcular la función ϕ tal que $\nabla\phi = \mathbf{A}$, o sea

(25) $$\frac{\partial\phi}{\partial x} = A_x(x,y,z) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = A_y(x,y,z) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = A_z(x,y,z)$$

El procedimiento consiste en realizar una integración, digamos de la primera de las relaciones (25),

$$\phi = \int A_x dx + f(y,z)$$

y luego determinar f(y, z) con las condiciones $\frac{\partial \phi}{\partial y} = A_y$ y $\frac{\partial \phi}{\partial z} = A_z$. Consideremos un ejemplo. Sea $\mathbf{A} = 4xyz\ \mathbf{i} + (2x^2 z - 6yz^3)\ \mathbf{j} + (2x^2 - 9y^2 z^2)\mathbf{k}$. Es fácil comprobar que el rotacional de este campo es idénticamente cero. Integrando la componente A_X obtenemos

$$\phi = \int 4xyz dx + f(y,z) = 2x^2 yz + f(y,z)$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^2 z + \frac{\partial f}{\partial y} = A_y = 2x^2 z - 6yz^3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6yz^3$$

Integrando la última relación,

$$f(y,z) = -\int 6yz^3 dy + g(z) = -3y^2 z^3 + g(z)$$

Finalmente,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 2x^2 y + \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2 y - 9y^2 z^2 + \frac{dg}{dz} = A_Z = 2x^2 y - 9y^2 z^2$$

de donde

$$\frac{dg}{dz} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g(z) = \text{constante} = c$$

El potencial escalar buscado es entonces

$$\phi(x, y, z) = 2x^2 yz - 3y^2 z^3 + c$$

Se comprueba que $\mathbf{A} = \nabla\phi$.

Hay otra manera de calcular el potencial escalar ϕ, que consiste en evaluar la integral

$$\phi(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$$

desde un punto (x_0, y_0, z_0) y a lo largo de un camino apropiados, como el mostrado en la Fig. 31.

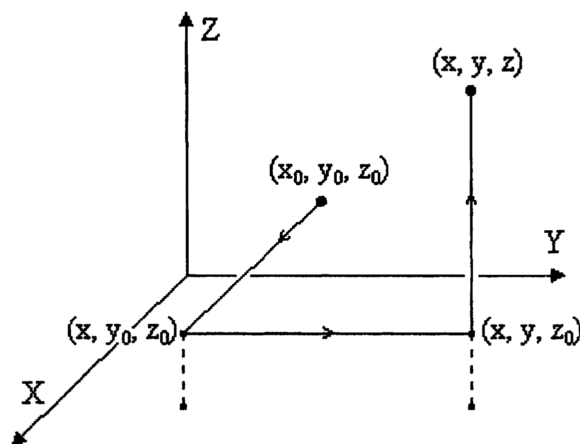


Fig. 33

El camino consta de segmentos rectos paralelos a los ejes coordenados. Se tiene

$$\phi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} A_x(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} A_y(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} A_z(x,y,z)dz$$

Por ejemplo, para el campo irrotacional

$$\mathbf{A} = y^2ze^x\,\mathbf{i} + 2yze^x\,\mathbf{j} + y^2e^x\,\mathbf{k}$$

escojamos $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. Entonces

$$A_x(x, y_0, z_0) = 0 \qquad A_y(x, y, z_0) = 0 \qquad A_z(x, y, z) = y^2e^x$$

Por lo tanto,

$$\phi = \int_0^z y^2e^xdz = y^2ze^x$$

Se denomina potencial vectorial a un campo vectorial **A** asociado a un campo solenoidal **B** en la forma **B** = $\nabla \times$ **A**:

<u>Teorema</u>. $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

Calculemos el potencial vectorial **A** correspondiente a un campo **B** dado. Tenemos las condiciones

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \qquad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Para satisfacer estas condiciones, escojamos $A_x = 0$ y veamos si podemos determinar A_y y A_z de tal manera que

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} \qquad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

La primera de estas ecuaciones la podemos satisfacer por

$$A_y = -\int_{z_0}^{z} B_x dz$$

Para satisfacer la segunda, propongamos

$$A_x = -\int_{z_0}^{z} B_y dz + f(x, y)$$

y usemos f(x, y) para satisfacer la tercera ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\int_{z_0}^{z} B_x dz\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[-\int_{z_0}^{z} B_y dz + f(x, y)\right] = B_z$$

o sea

$$-\int_{z_0}^{z}\left[\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right]dz - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = B_z$$

De la condición $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$ tenemos

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\partial B_z}{\partial z} dz - \frac{\partial f}{\partial y} = B_z$$

$$B_z(x,y,z) - B_z(x,y,z_0) - \frac{\partial f}{\partial y} = B_z(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -B_z(x,y,z_0) \qquad \Rightarrow \qquad f(x,y) = -\int_{y_0}^{y} B_z(x,y,z_0)dy$$

El potencial escalar **A** es entonces

$$(26) \qquad \begin{cases} A_x = \int_{z_0}^{z} B_y(x,y,z)dz - \int_{y_0}^{y} B_z(x,y,z_0)dy \\ A_y = -\int_{z_0}^{z} B_x(x,y,z)dz \\ A_z = 0 \end{cases}$$

Notemos que el potencial **A** *no es único*, puesto que una vez encontrado un potencial **A** podemos añadirle el gradiente de una función arbitraria χ:

$$\mathbf{A}' \to \mathbf{A} + \nabla\chi$$

y se sigue cumpliendo que $\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Esta libertad nos permite escoger el potencial vectorial **A** de modo que sea en todo punto perpendicular a una dirección dada: supongamos que $\mathbf{A}_0$ cumple la condición $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_0$, con $\mathbf{A}_0 \bullet \mathbf{e} \neq 0$, y queremos determinar **A** tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ con $\mathbf{A} \bullet \mathbf{e} = 0$.
Pongamos $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla\phi$,

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{e} = \mathbf{A}_0 \bullet \mathbf{e} + \nabla\phi \bullet \mathbf{e} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\phi \bullet \mathbf{e} = -\mathbf{A}_0 \bullet \mathbf{e} = \phi(x, y, z)$$

Resolviendo la última ecuación encontramos la ϕ apropiada.

También se puede determinar un potencial escalar que sea solenoidal: $\nabla \bullet \mathbf{A} = 0$. Si tenemos un potencial $\mathbf{A}_0$ tal que $\nabla \bullet \mathbf{A}_0 = \phi$, obtengamos otro potencial $\mathbf{A}_1$ tal que $\nabla \bullet \mathbf{A}_1 = -\phi$. Entonces el potencial $\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$ será el buscado. La prescripción $\nabla \bullet \mathbf{A} = 0$ se denomina "norma de Coulomb".

Problemas

1. Calcular la integral de línea $\int \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr}$ para el campo $\mathbf{A} = 3x^2y\,\mathbf{i} - 2xy^3\,\mathbf{j}$, a lo largo de la parábola $y = 2x^2$, desde (0,0) hasta (2,8).

2. Aplicar el teorema de Gauss en el plano para demostrar que el área de una curva C plana y cerrada y = f(x) viene dada por la integral

$$\frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx)$$

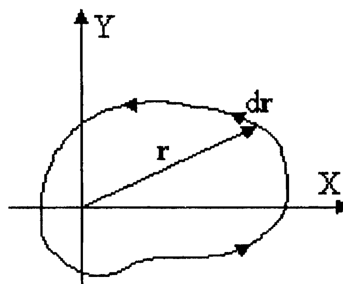


Fig. probl. 2

3. Calcular el área encerrada por la hipocicloide de cuatro puntas, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a\cos^3\theta$$

$$y = a\,\mathrm{sen}^3\theta$$

Respuesta.

$A =$ **¡Error!**πa^2

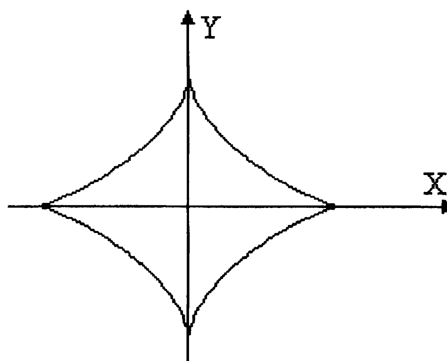


Fig. probl. 3

4. Sea Γ una curva cerrada (en general torcida). Definamos el área vectorial de Γ en la forma

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\oint \mathbf{r} \times \mathbf{dr}$$

Interpretar geométricamente A_x, A_y y A_z.

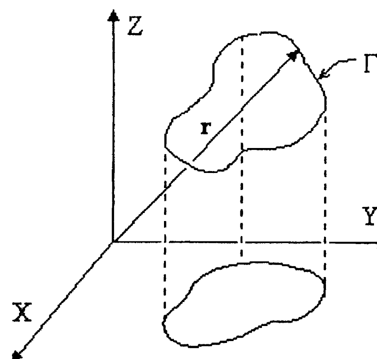
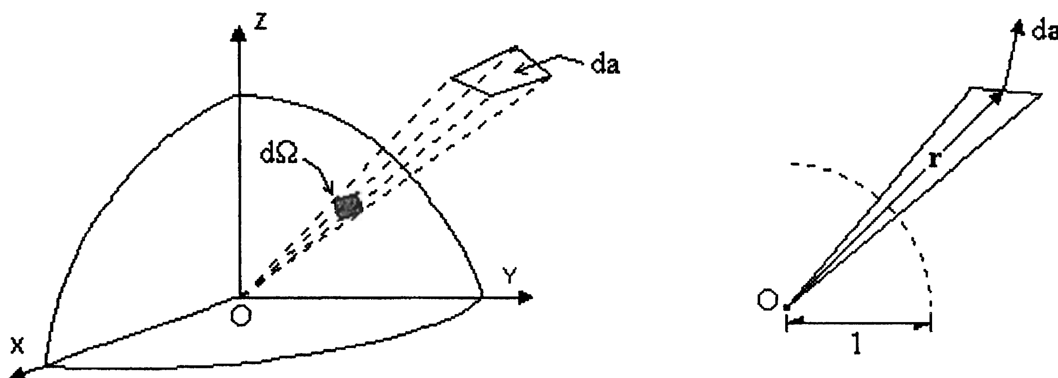


Fig. probl. 4

5. El ángulo sólido "dΩ" subtendido en el punto O por un elemento de área "da" se define como el área interceptada, sobre la superficie esférica de radio unitario centrada en O, por el cono de vértice O y base en "da".



Figs. probl. 5

Demostrar que $d\Omega = \dfrac{\mathbf{r} \bullet \mathbf{da}}{r^3}$, de tal manera que el ángulo sólido subtendido en O por una superficie arbitraria S es $\Omega = \displaystyle\int_S \frac{\mathbf{r} \bullet \mathbf{da}}{r^3}$.

6. Calcular el ángulo sólido subtendido por un cono circular recto en su vértice.
Respuesta. $\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$.

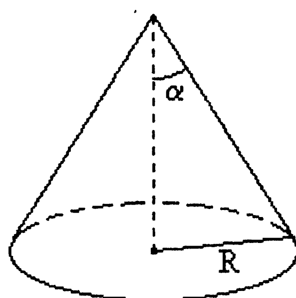


Fig. probl. 6

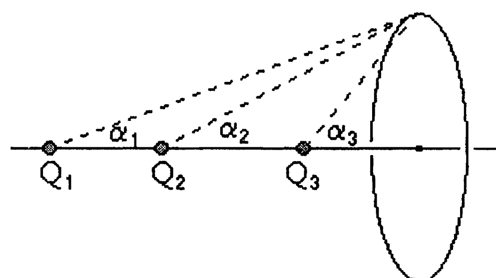


Fig. probl. 7

7. Sean Q_1, Q_2 y Q_3 cargas eléctricas colineales, y C un círculo cuyo plano es perpendicular a la línea de las cargas, y cuyo centro está sobre esta línea. Demostrar que el flujo del campo eléctrico de las cargas a través de C es

$$\int_C \mathbf{E} \bullet \mathbf{da} = \sum_{k=1}^{3} \frac{Q_k \Omega_k}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{3} Q_k (1 - \cos\alpha_k)$$

8. Demostrar el teorema de la divergencia o teorema de Gauss para el campo tensorial $T_{ij}(x, y, z)$, en la forma

$$\int \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \oint T_{ij} da_j$$

9. A partir del teorema de Gauss en el espacio tridimensional, demostrar el teorema de Gauss en el plano.

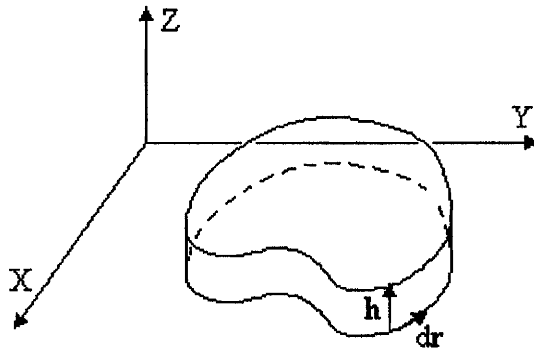


Fig. probl. 8

Sugerencia.
Aplique el teorema de la divergencia espacial a la región cilíndrica de altura $h = |\mathbf{h}|$ y de tapas planas, como se muestra en la figura. Suponga que el campo depende solamente de (x, y).
Exprese el elemento de área **da** sobre la superficie lateral en términos de **h** y **dr**.

10. Sea $\mathcal{R}$ un cuerpo sólido sumergido en un fluido en reposo, cuya densidad de masa es ρ.

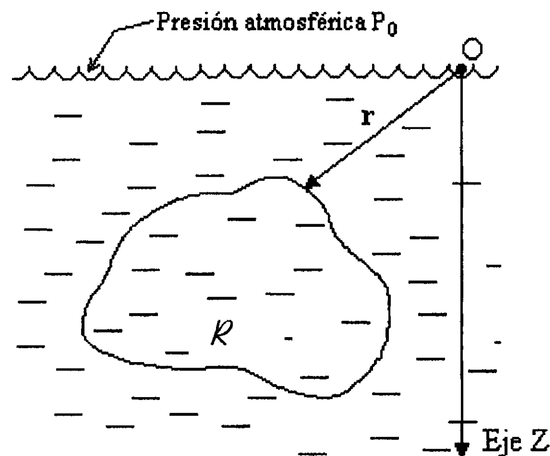


Fig. probl. 10

Tomando el eje Z como se muestra en la figura, tendremos para la presión hidrostática en un punto **r** de la superficie del sólido la expresión

$$P = P_0 + \rho g z$$

donde P_0 es la presión en la superficie del líquido.
Demostrar que la fuerza total sobre $\mathcal{R}$, debida al fluido, es igual al peso del fluido "desalojado" por $\mathcal{R}$, es decir, $|\mathbf{F}| = \rho g V$, donde V es el volumen de $\mathcal{R}$. Este es el principio de Arquímedes.

11. Demostrar que el momento total sobre el sólido del problema anterior, con respecto al origen de coordenadas, es $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{F}$, donde **F** es la fuerza hidrostática total sobre el sólido y $\mathbf{r}_{cm}$ es el vector de posición de su centro de masa.

12. Demostrar que una superficie sólida rígida Σ permanece en equilibrio bajo una presión interna P uniforme sobre todos sus elementos de área.

(Haga ver que la fuerza y el momento total sobre el cuerpo son iguales a cero.)

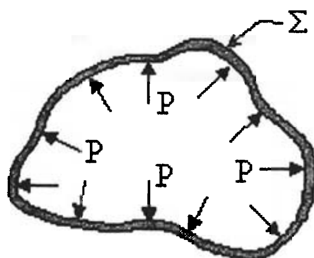


Fig. probl. 12

13. Demostrar que el volumen encerrado por una superficie S viene dado por

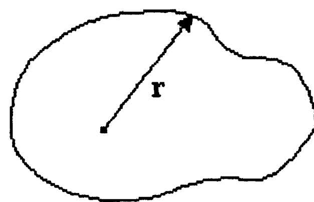


Fig. probl. 13

$$V = \frac{1}{3}\oint_S \mathbf{r} \bullet \mathbf{da}$$

Interprete geométricamente la relación

$$dV = \frac{1}{3}\mathbf{r} \bullet \mathbf{da}$$

14. Demostrar las identidades de Green,

$$\oint_S \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} da = \int_R \left(\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \bullet \nabla \Psi \right) dV$$

$$\oint_S \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) da = \int_R \left(\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi \right) dV$$

donde $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \nabla \Psi \bullet \mathbf{n}$, con $\mathbf{da} = \mathbf{n}\, da$.

15. El flujo de un vector puede escribirse en la forma

$$\int \mathbf{A} \bullet \mathbf{da} = \int A_x dydz + \int A_y dxdz + \int A_z dxdy$$

¿Significa esto que **da** = dydz **i** + dxdz **j** + dxdy **k**?

16. Aplicar el teorema de Stokes en la forma

$$\int \nabla \times \mathbf{A} \bullet \mathbf{da} = \oint \mathbf{A} \bullet \mathbf{dr}$$

al campo **A** = ϕ**c**, donde $\phi = \phi(\mathbf{r})$ y **c** ≡ constante, para deducir el teorema

$$\int \mathbf{da} \times \nabla\phi = \oint \phi\, \mathbf{dr}$$

17. Deducir la última relación del problema anterior del siguiente modo. Considere una superficie S con frontera C. Traslade esta superficie en una dirección arbitraria, siendo **h** el desplazamiento, con $|\mathbf{h}| << 1$.

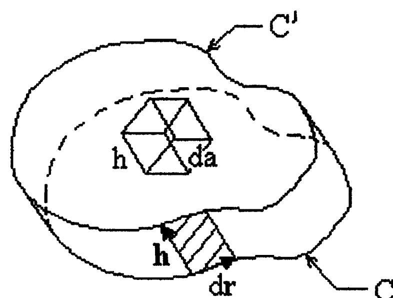


Fig. probl. 17

Denote con S′ a la superficie resultante de la traslación de S, y por C′ a su frontera. Sea L la superficie lateral cuya generatriz es **h**. Aplique el teorema de Gauss en la forma $\int_R \nabla\phi dV = \oint \phi \mathbf{da}$ a la región R cuya frontera es S′ + S + L. Tome en cuenta que sobre S se tiene $\phi = \phi(\mathbf{r})$, y sobre S′, $\phi = \phi(\mathbf{r} + \mathbf{h}) \approx \phi(\mathbf{r}) + \mathbf{h} \bullet \nabla\phi$.

18. Suponiendo que S es una superficie cerrada, demostrar que

$$\oint_S \nabla \times \mathbf{A} \bullet \mathbf{da} = 0$$

19. Calcular el potencial escalar del campo conservativo

$$\mathbf{A} = 2x \cos yz^2\, \mathbf{i} - x^2z^2 \operatorname{sen} yz^2\, \mathbf{j} - 2x^2z \operatorname{sen} yz^2\, \mathbf{k}$$

20. Demostrar que el campo **F** = (y + sen z) **i** + x **j** + x cos z **k** es conservativo y calcular su potencial escalar.

APÉNDICE I	EL TENSOR DE DEFORMACIONES

I.1 CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS u(r)

Imaginemos un cuerpo deformable $\mathcal{C}$ dividido en un número N muy grande de pequeños trocitos o *partículas*, las cuales distinguimos unas de otras mediante un vector de posición variable **r** que corre por toda la región espacial $\mathcal{R}$. ocupada por el cuerpo. Asociaremos un valor específico de **r**, digamos $\mathbf{r}_a = (x_a, y_a, z_a)$, con una y sólo una partícula "a" del cuerpo. Si tratamos con pocas partículas las distinguiremos también mediante letras mayúsculas P, Q, S, T, etc., con vectores de posición respectivos **OP**, **OQ**, **OS**, **OT**, etc, que emanan del origen O de un sistema cartesiano XYZ.

Supondremos que el cuerpo se encuentra en equilibrio bajo fuerzas aplicadas, fuerzas de reacción en apoyos fijos, el peso del cuerpo, etc.

La *configuración libre* del cuerpo es la colección $\{\mathbf{r}_a;\ a = 1, 2, ..., N\}$ de los vectores de posición de todas sus partículas cuando el cuerpo está *completamente* libre de fuerzas (en ausencia incluso de su propio peso).

Ahora bien, al activar las fuerzas, el cuerpo adopta cierta configuración de equilibrio en que las partículas han sufrido pequeños desplazamientos desde sus respectivas "posiciones libres" $\mathbf{r}_a$ hasta nuevas "posiciones desplazadas" $\mathbf{r}'_a$. Se denomina la *configuración desplazada (o deformada)* del cuerpo a la colección $\{\mathbf{r}'_a;\ a = 1, 2, ..., N\}$ de las posiciones desplazadas de sus partículas (véase la Fig. 1).

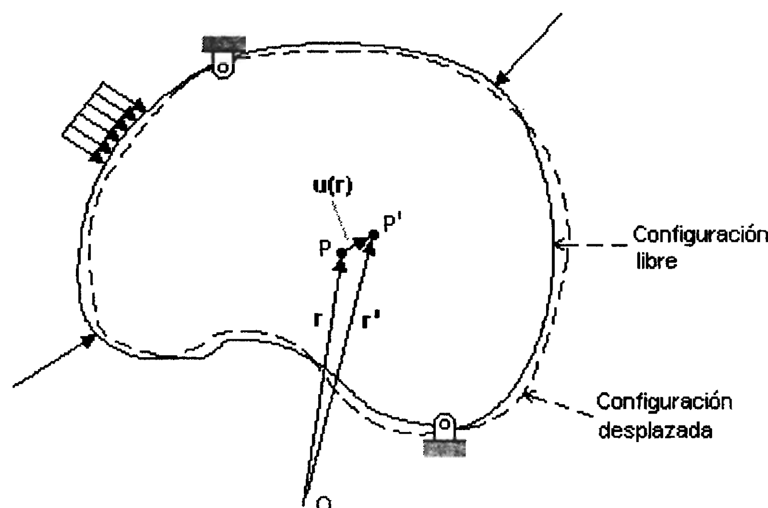


Fig. 1

El concepto matemático más directo asociado con el desplazamiento del cuerpo es el de *mapeo*.

El punto o partícula general $\mathbf{r}$ es mapeado al punto $\mathbf{r}'$ a través de una función vectorial denominada el *campo de desplazamientos*, denotado por $\mathbf{u}$ y definido por

(1) $$\mathbf{u}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$

Como vemos, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ es el (pequeño) desplazamiento sufrido por aquella partícula cuya posición en la configuración libre era $\mathbf{r}$. Supondremos que $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ es una función continua y al menos triplemente diferenciable en la región original $\mathcal{R}$..

Como hemos indicado en la Fig. 1, distinguiremos las posiciones desplazadas de los puntos P, Q, etc. mediante "primas", en la forma P′, Q′, etc. Si la posición del punto general P es $\mathbf{r}$, notemos la equivalencia notacional de (1) con

(2) $$\mathbf{u}(P) = \mathbf{PP'}$$

Podemos escribir (1) en una forma despejada para $\mathbf{r}'$,

(3) $$\begin{aligned} x' &= x + u_x(x, y, z) \\ y' &= y + u_y(x, y, z) \\ z' &= z + u_z(x, y, z) \end{aligned}$$

la cual visualizamos como una transformación de coordenadas. Supondremos que el jacobiano de esta transformación siempre es positivo (lo cual excluye las reflexiones)

(4) $$\frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0$$

Además, que no se anula en ningún punto, lo cual significa físicamente que no se forman huecos tras la deformación del cuerpo.

Existe otra forma de caracterizar matemáticamente el desplazamiento o deformación del cuerpo, mediante un tensor de segundo orden denominado el tensor de deformaciones. Las componentes de este tensor son cantidades que se pueden medir más fácilmente en el laboratorio. Además, el tensor de deformaciones será más conveniente que el campo $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ para relacionar las deformaciones del cuerpo con las fuerzas que actúan sobre él.

La deformación del cuerpo implica unas variaciones de la forma y dimensiones geométricas de sus partículas, las cuales imaginaremos como pequeños prismas rectos en la configuración libre.

Si la deformación es "pequeña" (calificativo que precisaremos matemáticamente más adelante), el pequeño prisma se convierte en un pequeño paralelepípedo. Las aristas del paralelepípedo toman orientaciones distintas de las correspondientes a la figura original prismática. Los lados del prisma recto original cambian de valor, lo mismo que los ángulos rectos entre ellos. El tensor de deformaciones nos servirá para calcular los nuevos valores de los lados y ángulos, así como también las variaciones de área y volumen de elementos situados en cualquier punto del cuerpo.

I.2 Variación de un pequeño segmento vectorial

Dado el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ sobre $\mathcal{R}$, podemos calcular todo lo relacionado con la geometría del cuerpo en su configuración desplazada. En especial, conviene investigar cómo varía un pequeño segmento vectorial **a**, determinado en la configuración original por dos puntos muy cercanos P y Q, localizados respectivamente en $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}+\mathbf{a}$ (Fig. 2). Los segmentos constituyen los lados o aristas de ángulos, paralelogramos y paralelepípedos, así que sabiendo cómo se desplaza un segmento general podremos calcular variaciones locales de longitudes, ángulos, áreas y volúmenes de una a otra configuración.

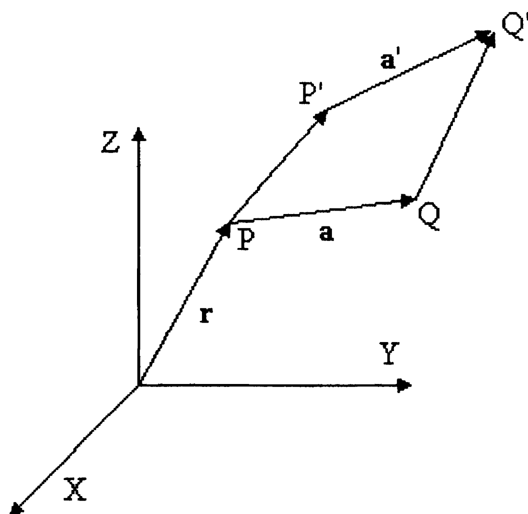


Fig. 2

Sean P′ y Q′ las posiciones desplazadas de las partículas localizadas originalmente en los extremos del segmento **a**. Poniendo $\mathbf{a}' = \mathbf{P'Q'}$ tenemos de la Fig. 2

$$\begin{aligned}\mathbf{a}' &= \mathbf{a} + \mathbf{QQ'} - \mathbf{PP'} \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{u}(\mathrm{Q}) - \mathbf{u}(\mathrm{P}) \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{a}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Supongamos que **a** se encuentra dentro de la región de convergencia de **u** en el punto P, y desarrollemos en serie de Taylor

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a}\bullet\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2!}(\mathbf{a}\bullet\nabla)^2\mathbf{u} + \ldots + \frac{1}{n!}(\mathbf{a}\bullet\nabla)^n\mathbf{u} + \ldots$$

donde todos los términos del segundo miembro están evaluados en P (o sea **r**).

Ahora bien, en la llamada *aproximación de pequeñas vecindades* suponemos la magnitud $|\mathbf{a}|$ tan pequeña que podamos despreciar potencias cuadráticas y superiores de $|\mathbf{a}|$, con lo que obtenemos

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \bullet \nabla)\mathbf{u}$$

o sea

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + (\mathbf{a} \bullet \nabla)\mathbf{u} \qquad \text{(a primer orden en } |\mathbf{a}|) \tag{5}$$

Esta ecuación es fundamental para todo el desarrollo posterior de la teoría. De ella extraeremos la mayoría de los resultados importantes.

I.3 DESPLAZAMIENTOS PEQUEÑOS

En la sección I.1 mencionamos que el sistema de fuerzas que solicita al cuerpo produce sólo desplazamientos "pequeños" de sus partículas. En esta sección explicaremos con mayor precisión qué es lo que entenderemos por "pequeño". Cabe hacer notar que la aproximación de pequeñas vecindades definida en la sección precedente puede emplearse en general para toda clase de desplazamientos, sean grandes o pequeños. Sin embargo, nosotros nos limitaremos a esta última clase de desplazamientos.

Un *desplazamiento pequeño* será aquel ante el cual el cambio del segmento vectorial $\mathbf{a}$, es decir $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$, es de magnitud muy pequeña en comparación con la magnitud original $a \equiv |\mathbf{a}|$,

$$\frac{|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|}{a} << 1 \tag{6}$$

de tal manera que podamos despreciar cuadrados y potencias superiores de tal cociente.

Veamos otras maneras equivalentes de expresar esta aproximación. De acuerdo con (5), la ecuación (3) es lo mismo que

$$|(\hat{\mathbf{a}} \bullet \nabla)\mathbf{u}| << 1 \tag{7}$$

donde $\hat{\mathbf{a}}$ es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{a}$. Pero $(\hat{\mathbf{a}} \bullet \nabla)\mathbf{u}$ es la derivada direccional de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{a}$, de modo que podemos poner en lugar de (7)

$$\left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a}\right| << 1$$

En particular, la dirección **â** puede ser la de alguno de los ejes coordenados,

$$\left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right| << 1, \qquad \left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right| << 1, \qquad \left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right| << 1$$

de donde resultan obviamente las siguientes condiciones,

$$\left|\frac{\partial u_x}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial u_x}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial u_y}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u_y}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial u_y}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial u_z}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u_z}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial u_z}{\partial z}\right| << 1$$

o, abreviadamente, la forma especial que nos será de utilidad posteriormente:

(8) $$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| << 1, \qquad (i, j = 1,2,3)$$

I.4 TENSOR DE DESPLAZAMIENTOS

La relación fundamental $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + (\mathbf{a} \bullet \nabla)\mathbf{u}$ adopta una forma muy conveniente en el lenguaje de matrices. Igualemos componente a componente en ambos miembros y desarrollemos el operador escalar $\mathbf{a} \bullet \nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$. Obtenemos

$$a'_x = a_x + (\mathbf{a} \bullet \nabla) u_x = a_x + a_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$a'_y = a_y + (\mathbf{a} \bullet \nabla) u_y = a_y + a_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + a_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$a'_z = a_z + (\mathbf{a} \bullet \nabla) u_z = a_z + a_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + a_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + a_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Se sigue que

(9) $$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

o bien, en el lenguaje de matrices

(10) $$\mathsf{a}' = \mathsf{D}\,\mathsf{a}$$

donde a' y a son las matrices columna asociadas a los vectores $\mathbf{a}'$ y $\mathbf{a}$, y D es la llamada *matriz de desplazamientos*. Esta matriz, aplicada sobre el segmento original, produce el segmento desplazado. Notemos que se descompone en la forma

$$\mathsf{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial u_x}{\partial x}&\frac{\partial u_x}{\partial y}&\frac{\partial u_x}{\partial z}\\ \frac{\partial u_y}{\partial x}&\frac{\partial u_y}{\partial y}&\frac{\partial u_y}{\partial z}\\ \frac{\partial u_z}{\partial x}&\frac{\partial u_z}{\partial y}&\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{pmatrix}\equiv \mathsf{I}+\mathsf{G}$$

La primera parte es la matriz unidad $\mathsf{I}=(\delta_{ij})$; la segunda la denominaremos la *matriz gradiente* $\mathsf{G}=(G_{ij})\equiv(\nabla_j u_i)=\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$. De acuerdo con las condiciones (8), los elementos de la matriz gradiente son muy pequeños en comparación con la unidad. El *tensor de desplazamientos*, representado por la matriz D, es $D_{ij}=\delta_{ij}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

I.5 Traslación, rotación y deformación

El desplazamiento del segmento $\mathbf{a}$, descrito por la matriz D, consta localmente de tres partes. Dos de ellas corresponden a movimientos rígidos del segmento, uno de traslación y el otro de rotación, en los que se conserva la longitud del segmento. La parte restante es la deformación del segmento, y es la que produce el cambio de longitud.

Escribamos de nuevo la matriz de desplazamientos en la forma

$$\mathsf{D}=\mathsf{I}+\mathsf{G}$$

En la traslación no varían las componentes de $\mathbf{a}$, de modo que la parte de D que describe la traslación es la matriz unidad I. La matriz gradiente G engloba tanto la rotación como la deformación. Tomando en cuenta que se trata aquí de una rotación *infinitesimal*, y que tales rotaciones se describen mediante matrices antisimétricas, descompongamos la matriz G en sus partes simétrica y antisimétrica:

$$\mathsf{G}=(G_{ij})=\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)$$

La rotación (parte antisimétrica) quedará descrita entonces por la matriz

(11) $$\mathsf{R} = (R_{ij}) \equiv \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

Por exclusión, la parte simétrica es la *matriz de deformaciones*

(12) $$\mathsf{E} = (E_{ij}) \equiv \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

Por construcción, los elementos R_{ij}, así como los E_{ij}, son componentes de tensores, del *tensor de rotación infinitesimal* y *tensor de deformaciones*, respectivamente.

Ahora podemos escribir el desplazamiento del segmento **a** en una forma que separa las tres partes, así:

(13) $$\mathsf{a}' = \mathsf{D\,a} = (\mathsf{I} + \mathsf{R} + \mathsf{E})\,\mathsf{a} = \mathsf{I\,a} + \mathsf{R\,a} + \mathsf{E\,a}$$

En la Fig. 3 se muestran las contribuciones que forman el segmento desplazado a′. En general, los vectores a, Ra y Ea no se encuentran en un mismo plano. El vector Ea no es paralelo a ninguno de a y a′; el vector Ra siempre es perpendicular al vector a.

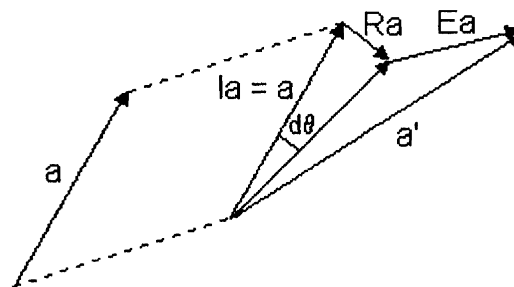


Fig. 3

Podemos obtener fácilmente los parámetros de la rotación (el eje y el ángulo de rotación) evaluando el vector Ra de la siguiente manera: primeramente extraemos la parte antisimétrica de la matriz gradiente G usando la relación general

$$G_{ij} - G_{ji} = \in_{mij} \in_{mpq} G_{pq}$$

Poniendo $G_{pq} = \dfrac{\partial u_p}{\partial x_q}$ y usando la relación $\in_{mpq} G_{pq} = \in_{mpq} \dfrac{\partial u_p}{\partial x_q} = -(\nabla \times \mathbf{u})_m$

obtenemos

$$R_{ij}\, a_j = - \in_{mij} (\nabla \times \mathbf{u})_m\, a_j = ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{a})_i$$

Comparando esta relación con la que da la variación d**a** en una rotación infinitesimal del vector **a**, descrita por el vector dθ, a saber d**a** = dθ × **a**, tenemos que

(14) $$d\theta = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$$

I.6 DEFORMACIONES LONGITUDINALES Y ANGULARES

El tensor de deformaciones $\mathsf{E} = (\in_{ij})$, escrito en forma desarrollada como

(15) $$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

contiene toda la información acerca del cambio de forma y dimensiones del cuerpo al desplazarse. Sus elementos $\in_{ij}$ son cantidades que poseen una interpretación sencilla y que pueden determinarse experimentalmente. Con el fin de obtener esa interpretación definiremos en este apartado las deformaciones longitudinales y angulares.

<u>Deformaciones longitudinales</u>

Sea P un punto arbitrario del cuerpo en su configuración libre (Fig. 4).Tomemos en P un pequeño segmento **a** orientado arbitrariamente. Denotemos con P′ el punto adonde va a dar P al desplazarse el cuerpo, y con **a′** el segmento desplazado en que se convierte **a**. Se define la deformación longitudinal en P, correspondiente a la dirección **a**, como

(16) $$\in_a (P) = \frac{a' - a}{a}$$

(**a** debe ser pequeño en el sentido explicado en la sección I.2, de modo que **a′** venga dado por la relación fundamental (5)).

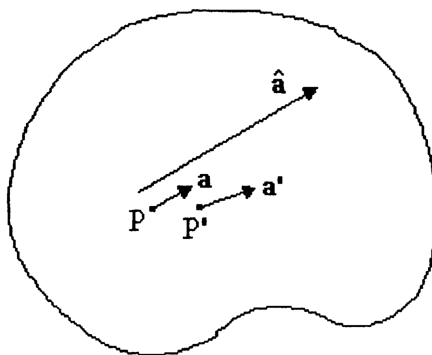


Fig. 4

En particular, las deformaciones longitudinales en las direcciones de los ejes coordenados en P se denotan por

$$\in_x(P), \ \in_y(P) \ \text{ y } \ \in_z(P),$$

respectivamente, y corresponden obviamente a los casos

$$\mathbf{\hat{a}} = \mathbf{i}, \ \ \mathbf{\hat{a}} = \mathbf{j} \ \text{ y } \ \mathbf{\hat{a}} = \mathbf{k}$$

Advierta que $\in_a(P)$ es una cantidad sin dimensiones físicas que da el cambio de longitud, por unidad de longitud, de segmentos ubicados en P y orientados en la dirección del unitario **â**. La deformación longitudinal es función *del punto* P *y de la dirección* **â**.

Deformaciones angulares

Sea el punto arbitrario P el vértice de un ángulo recto determinado por dos pequeños segmentos perpendiculares **a** y **b** (Fig. 5). Supongamos que en el desplazamiento del cuerpo P va a dar a P′, **a** se convierte en **a′** y **b** en **b′**. Sea θ el ángulo que forman los segmentos desplazados **a′** y **b′**.

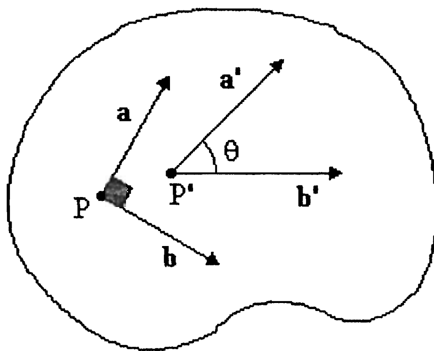


Fig. 5

Se define la deformación angular en P, correspondiente al ángulo recto $\angle(\mathbf{\hat{a}}, \mathbf{\hat{b}})$ como

$$(17) \qquad \gamma_{ab}(P) \equiv \gamma_{ba}(P) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Dado que γ_{ab} es muy pequeño podemos poner también

$$(18) \qquad \gamma_{ab} \approx \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \theta) \ \text{ ó } \approx \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$$
$$\approx \cos\theta \quad \text{ó} \ \approx \cot\theta$$

Para $\mathbf{\hat{a}} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{\hat{b}} = \mathbf{j}$ escribimos γ_{xy}, con significados análogos para γ_{xz} y γ_{yz}.

$\gamma_{ab}(P)$ no posee dimensiones físicas; es igual al cambio del ángulo recto original formado en P por las direcciones **a** y **b**. $\gamma_{ab}(P)$ es una función *del punto* P *y de ambas direcciones* **â** y $\mathbf{\hat{b}}$.

I.7 CÁLCULO DE LAS DEFORMACIONES A PARTIR DEL TENSOR DE DEFORMACIONES

Dados E y a, la deformación longitudinal $\in_a$ se calcula como sigue: partimos de la ecuación (5),

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + (\mathbf{a} \bullet \nabla)\mathbf{u} = a(\hat{\mathbf{a}} + (\hat{\mathbf{a}} \bullet \nabla)\mathbf{u}) \equiv a(\hat{\mathbf{a}} + \delta) \tag{19}$$

en la que hemos puesto $\delta \equiv (\hat{\mathbf{a}} \bullet \nabla)\mathbf{u}$ para simplificar la notación. Tengamos en cuenta que $\delta << 1$ y elevemos al cuadrado la expresión (19),

$$a'^2 = \mathbf{a}' \bullet \mathbf{a}' = a^2(1 + 2\hat{\mathbf{a}} \bullet \delta + \delta^2) \approx a^2(1 + 2\,\hat{\mathbf{a}} \bullet \delta)$$

Sacando la raíz cuadrada y usando la aproximación $(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ obtenemos

$$a' = a(1 + \hat{\mathbf{a}} \bullet \delta)$$

de donde

$$\in_a = \frac{a' - a}{a} = \hat{\mathbf{a}} \bullet (\hat{\mathbf{a}} \bullet \nabla)\mathbf{u} \tag{20}$$

Esta expresión es muy conveniente para obtener las expresiones generales de las deformaciones longitudinales en los sistemas de coordenadas cilíndrico y esférico.

Obtendremos a continuación otra forma de (20), más apropiada para efectuar cálculos numéricos. Pasemos (20) a la notación de índices,

$$\in_a = \hat{a}_i \hat{a}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Intercambiando índices mudos $i \leftrightarrow j$ y usando la asociatividad del producto,

$$\in_a = \hat{a}_i \hat{a}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \hat{a}_j \hat{a}_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \hat{a}_i \hat{a}_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \hat{a}_i \hat{a}_j \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \hat{a}_i \hat{a}_j \in_{ij} = \hat{a}_i \in_{ij} \hat{a}_j \tag{21}$$

Resulta el siguiente producto de matrices,

$$\in_a = \tilde{\hat{a}}\, E\, \hat{a} \tag{22}$$

donde $\hat{a}$ es la matriz columna correspondiente al vector unitario $\hat{\mathbf{a}}$, y $\tilde{\hat{a}}$ es la transpuesta de aquella (o sea la matriz renglón correspondiente a $\hat{\mathbf{a}}$).

Para obtener las deformaciones angulares, partimos de

(23) $$\gamma_{ab} \approx \operatorname{sen}\gamma_{ab} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \frac{\mathbf{a}' \bullet \mathbf{b}'}{a'b'}$$

De las representaciones

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + (\mathbf{a} \bullet \nabla)\mathbf{u} = a(\hat{\mathbf{a}} + \delta) \qquad \text{con} \qquad |\delta| = |(\hat{\mathbf{a}} \bullet \nabla)\mathbf{u}| << 1$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} + (\mathbf{b} \bullet \nabla)\mathbf{u} = b(\hat{\mathbf{b}} + \eta) \qquad \text{con} \qquad |\eta| = |(\hat{\mathbf{b}} \bullet \nabla)\mathbf{u}| << 1$$

y empleando además

$$a' = a(1 + \in_a) \qquad b' = b(1 + \in_b)$$

tenemos

$$\gamma_{ab} = \frac{(\hat{\mathbf{a}} + \delta) \bullet (\hat{\mathbf{b}} + \eta)}{(1 + \in_a)(1 + \in_b)} = (\hat{\mathbf{a}} \bullet \eta + \hat{\mathbf{b}} \bullet \delta + \delta \bullet \eta)(1 - \in_a + \ldots)(1 - \in_b + \ldots)$$

(Se usó $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$, y el desarrollo $1/(1 + \in) = 1 - \in + \ldots$).
Manteniendo solamente términos de primer orden en $\in_a$, $\in_b$, δ y η llegamos a

$$\gamma_{ab} = \hat{\mathbf{a}} \bullet \eta + \hat{\mathbf{b}} \bullet \delta$$

o bien

(24) $$\gamma_{ab} = \hat{\mathbf{a}} \bullet (\hat{\mathbf{b}} \bullet \nabla)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{b}} \bullet (\hat{\mathbf{a}} \bullet \nabla)\mathbf{u}$$

Para escribir (24) en una forma matricial más conveniente para el cálculo, la pasamos a notación tensorial,

$$\gamma_{ab} = \hat{a}_m \left(\hat{b}_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u_m + \hat{b}_m \left(\hat{a}_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u_m$$

Intercambiando los índices mudos $m \leftrightarrow n$ en el segundo término llegamos a

(25) $$\gamma_{ab} = 2\tilde{\hat{a}} E \hat{b} \qquad \text{y también} \qquad \gamma_{ab} = 2\tilde{\hat{b}} E \hat{a}$$

I.8 Interpretación de los elementos del tensor de deformaciones

Usando (21), calculemos la deformación longitudinal en la dirección del eje X. Debemos tomar **a** en la dirección del vector **i**,

$$\in_x = \hat{a}_i \hat{a}_j \in_{ij} \qquad \text{con} \qquad \hat{a}_i = (\mathbf{i})_i = \delta_i^{(1)}$$

Obtenemos

$$\in_x = \delta_i^{(1)} \delta_j^{(1)} \in_{ij} = \in_{11}$$

Análogamente, $\in_y = \in_{22}$ y $\in_z = \in_{33}$. Por otra parte, para calcular γ_{xy}, tomemos en (25) $\hat{a}_i = \delta_i^{(1)}$ y $\hat{b}_i = \delta_i^{(2)}$,

$$\gamma_{xy} = 2\,\tilde{\hat{i}}\,\mathsf{E}\,\hat{j} = 2\,\delta_i^{(1)} \in_{ij} \delta_j^{(2)} = 2 \in_{12}$$

Hemos identificado así los elementos del tensor de deformaciones, en la forma

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} \in_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \in_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \in_z \end{pmatrix} \tag{26}$$

con

$$\begin{cases} \in_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} \\ \in_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \\ \in_x = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} \end{cases} \tag{27}$$

I.9 Deformación uniforme

La deformación se denomina *uniforme* cuando la matriz E es constante, o sea que las deformaciones longitudinales y angulares no dependen de la posición. En tal caso el campo de desplazamientos tiene la forma

$$u_i = c_i + c_{ij}\, x_j \tag{28}$$

donde el vector c_i y el tensor c_{ij} son constantes.

Los tensores de deformaciones $\in_{ij}$ y de rotaciones ω_{ij} son respectivamente

(29) $$\in_{ij} = \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji})$$

(30) $$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(c_{ij} - c_{ji})$$

El vector c_i en (28) corresponde a una traslación del cuerpo como un todo. Como vemos, las partes simétrica y antisimétrica de la matriz (c_{ij}) corresponden a la deformación y a la rotación, respectivamente.

El eje y el ángulo de rotación vienen dados por

(31) $$d\theta = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2}(c_{32} - c_{23})\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(c_{13} - c_{31})\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}(c_{21} - c_{12})\,\mathbf{k}$$

Si excluimos la traslación y la rotación, la deformación uniforme se describirá por

(32) $$u_i = C_{ij}\, x_j$$ donde C_{ij} es constante y *simétrica.*

Bajo una deformación uniforme se verifica lo siguiente:

- Segmentos rectos de cualquier longitud (no necesariamente pequeños) se transforman en segmentos rectos.
- Rectas paralelas se convierten en rectas paralelas.
- Planos se transforman en planos. También se conserva el paralelismo entre planos.

Para deformaciones uniformes es válido calcular $\in_a$ y γ_{ab} usando segmentos grandes. Demostrémoslo para las longitudinales, usando las designaciones de la Fig. 6.

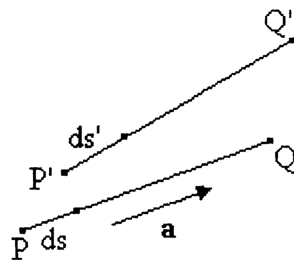


Fig. 6

Pongamos, por definición

$$\in_a = \frac{ds' - ds}{ds}$$

("ds" pequeño, en la dirección de **a**)

Entonces,

$$P'Q' = \int ds' = \int ds\,(1+\in_a) = (1+\in_a)\int ds = (1+\in_a)PQ$$

(Como $\in_a$ es constante, se sacó de la integral). Se encuentra así

(33) $$\in_a = \frac{P'Q' - PQ}{PQ}$$ QED.

I.10 Transformación de coordenadas

Consideremos el siguiente problema: en un punto dado del sólido, P, se conoce la matriz de deformaciones E, es decir, las deformaciones longitudinales asociadas con las direcciones X, Y, Z y las deformaciones angulares correspondientes a los ángulos rectos $\angle$(X, Y), $\angle$(X, Z) y $\angle$(Y, Z) erigidos en P. Ahora bien, ¿cuánto valen las deformaciones correspondientes a otras direcciones mutuamente ortogonales X′, Y′, Z′ erigidas en P? O en otras palabras, ¿cuál es la matriz de deformaciones E' en el nuevo sistema X′Y′Z′?

En realidad este problema ya está resuelto por las fórmulas

$$\epsilon_a = \tilde{\hat{a}}\, \mathsf{E}\, \hat{a} \qquad \text{y} \qquad \gamma_{ab} = 2\tilde{\hat{a}}\mathsf{E}\hat{b}$$

que dan la deformación longitudinal a lo largo de cualquier dirección espacial **a**, y la deformación angular de un ángulo recto orientado arbitrariamente en el espacio por los vectores **a** y **b**. Bastaría con tomar en la primera sucesivamente $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{i}'$, $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{j}'$ y $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{k}'$, y hacer algo similar en la segunda. Así obtendríamos, por ejemplo,

$$\epsilon_{z'} = \tilde{\hat{k}}'\mathsf{E}\hat{k}'$$

donde los elementos de la matriz columna $\hat{k}'$ son las componentes de $\mathbf{k}'$ relativas al sistema XYZ, o sea

$$\hat{\mathbf{k}}' = a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\,\mathbf{j} + a_{22}\,\mathbf{k} \qquad \text{o bien} \qquad \hat{k}' = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

donde a_{ij} son los elementos de la matriz de transformación entre ambos sistemas. La deformación $\gamma_{y'z'}$, digamos, se calcularía así:

$$\gamma_{y'z'} = 2\tilde{\hat{j}}'\mathsf{E}\hat{k}' = 2(a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23})\mathsf{E}\begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Se advierte que existe la relación

$$\text{(34)} \qquad \mathsf{E}' = \mathsf{A}\,\mathsf{E}\,\tilde{\mathsf{A}}$$

De hecho esta es la manera como se transforma todo tensor de segundo orden, en particular el tensor de deformaciones.

En las aplicaciones es común el caso de deformaciones *planas*, en el que las deformaciones angulares asociadas con la dirección Z son todas nulas: $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. La matriz de deformaciones tendrá la forma

$$\text{(35)} \qquad E = \begin{pmatrix} \in_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \in_y & 0 \\ 0 & 0 & \in_z \end{pmatrix}$$

Supongamos que el sistema X′Y′Z′ se obtenga girando el sistema XYZ un ángulo θ alrededor del eje Z (Fig. 7).

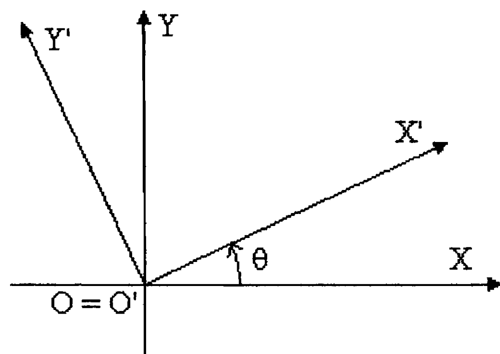


Fig. 7

La matriz de transformación correspondiente es

$$\text{(36)} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicándola según (34) obtenemos las siguientes relaciones entre las deformaciones en uno y otro sistema:

$$\in_{x'} = \in_x \cos^2\theta + \in_y \operatorname{sen}^2\theta + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$\text{(37)} \qquad \in_{y'} = \in_x \operatorname{sen}^2\theta + \in_y \cos^2\theta - \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad\qquad \in_{z'} = \in_z$$

$$\gamma_{x'y'} = 2(\in_y - \in_x) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \gamma_{xy} (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

I.11 Deformaciones principales

Sean $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ pequeños segmentos perpendiculares entre sí en la configuración original del sólido, y ubicados en el punto arbitrario P. Consideremos el siguiente problema: ¿cuál debe ser la orientación original de esta terna ortogonal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ para que permanezca ortogonal después de la deformación del sólido?

La condición mencionada es equivalente a pedir que no se alteren los ángulos rectos entre $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_3$, y $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, cosa que expresamos así:

$$\gamma_{e_1e_2} = \gamma_{e_1e_3} = \gamma_{e_2e_3}$$

Por la ecuación $\gamma_{ab} = 2\tilde{a}E\hat{b}$ tenemos entonces las condiciones

(38) $$\tilde{e}_1 E e_2 = \tilde{e}_2 E e_1 = 0$$

(39) $$\tilde{e}_1 E e_3 = \tilde{e}_3 E e_1 = 0$$

(40) $$\tilde{e}_2 E e_3 = \tilde{e}_3 E e_2 = 0$$

Se sigue de (38) y (39) que el vector Ee_1 debe ser perpendicular a e_2 y a e_3. Análogamente, las relaciones implican que Ee_2 es perpendicular a e_1 y e_3, y que Ee_3 es perpendicular a e_1 y a e_2. Pero entonces Ee_1 será paralelo a e_1, Ee_2 lo será a e_2, y Ee_3 lo será a e_3, esto es,

(41) $$Ee_1 = \lambda_1 e_1 \qquad Ee_1 = \lambda_2 e_2 \qquad Ee_3 = \lambda_3 e_3$$

De esta manera, el problema de determinar la terna $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se ha transformado en el problema de hallar tres soluciones linealmente independientes de la ecuación de eigenvalores

(42) $$E\,e = \lambda\, e$$ con soluciones e_1, e_2, e_3 y λ_1, λ_2, λ_3

En álgebra lineal es el bien conocido problema de "diagonalización de matrices". Allí se demuestra que los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, que pueden tomarse unitarios, resultan mutuamente perpendiculares; estos vectores definen lo que se llama las *direcciones principales* del tensor $\in_{ij}$ en P. Los valores λ_1, λ_2 y λ_3 se denominan las *deformaciones principales* en P. Son las deformaciones longitudinales en las direcciones principales:

(43) $$\in_{e_1} = \tilde{e}_1 E e_1 = \tilde{e}_1 \lambda_1 e_1 = \lambda_1 \tilde{e}_1 e_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 = \lambda_1$$ etc.

Un prisma rectangular de lados a, b,c en la configuración no deformada, orientado según las direcciones principales, se transforma en otro prisma de lados

$$a(1 + \lambda_1) \qquad b(1 + \lambda_2) \qquad c(1 + \lambda_3)$$

Bajo la deformación del sólido, una pequeña esfera centrada en P se desplaza, rota y sufre elongación o contracción puras en las direcciones principales. Su forma final es un pequeño elipsoide cuyos semiejes se acomodan en las direcciones principales de E en P.

APÉNDICE II	EL TENSOR DE ESFUERZOS

II.1 DEFINICIÓN DEL VECTOR ESFUERZO

La definición más simple de "esfuerzo" se introduce en conexión con el *ensayo de tracción simple*. Este ensayo consiste en someter a tensión simple una pequeña muestra del material de interés (Fig. 1), y medir las elongaciones provocadas por fuerza variable.

Se define el esfuerzo σ como el cociente de la fuerza aplicada F y el área A de la sección transversal de la muestra (o "probeta"),

(1) $$\sigma = \frac{F}{A}$$

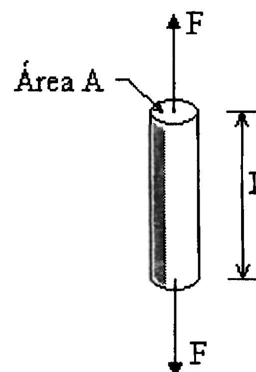


Fig. 1

Esta es la cantidad que sirve de base para la obtención experimental de los diagramas esfuerzo-deformación característicos de los materiales. También es la que se usa en el análisis de elementos materiales sometidos a cargas uniaxiales simples. Se le llama "esfuerzo ingenieril" porque la definición (1) está referida al área *inicial* A de la probeta. Está claro que conforme se aumenta la fuerza el material se elonga y se adelgaza, es decir, su área inicial A disminuye. El "esfuerzo real" se define mediante la misma expresión (1), donde el área A es el área transversal *actual* de la muestra. El esfuerzo real se utiliza en consideraciones teóricas; el esfuerzo ingenieril es el que se usa en el diseño, por su simplicidad.

El concepto de esfuerzo se generaliza a la situación en que el material posee dimensiones arbitrarias y se halla bajo cargas complejas. Procedamos a explicar la definición más general de vector esfuerzo.

En el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo *como un todo* intervienen el peso del cuerpo, las fuerzas controlables aplicadas externamente, y las fuerzas de reacción en los apoyos del cuerpo. Generalmente las dos primeras son conocidas y las últimas deben obtenerse de los principios físicos. Ahora bien, el diseño de miembros estructurales sometidos a cargas incluye el análisis de las deformaciones de estos miembros, para lo cual es menester conocer las fuerzas internas en ellos.

Las fuerzas internas en el seno de un miembro se estudian aplicando los principios de la estática ya no al miembro estructural completo, sino a *porciones* del mismo. Estas porciones se definen mediante *secciones sistémicas* (o secciones *imaginarias*) practicadas a través del interior del mismo. Obviamente no se trata de cortar físicamente el material, sino de separarlo conceptualmente en dos o más partes (o "subsistemas").

Al hacer el diagrama de cuerpo libre de una porción del material entrarán en juego, a través de toda la superficie de la sección sistémica, las fuerzas de interacción internas entre las porciones del material separadas por dicha sección. El concepto general de esfuerzo sirve esencialmente para describir estas fuerzas en el interior del miembro, y posibilita hacer el diagrama de cuerpo libre (DCL) de cualquier porción del mismo.

Pasemos a la definición matemática del vector esfuerzo. Consideremos un sólido en equilibrio y practiquemos una sección S mediante un plano P, el cual divide el sólido en dos subsistemas A y B (Fig. 2).

Al hacer el DCL del subsistema A, debemos suponer que a través de toda la sección S actúa una distribución superficial de fuerzas debidas al contacto con el subsistema B (Fig. 3). La *densidad superficial de fuerza* asociada a esta distribución es el *campo de esfuerzos* en la sección S.

Para expresar matemáticamente el campo de esfuerzos primeramente caractericemos la sección S mediante el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ normal a la misma, dirigido convencionalmente hacia fuera del subsistema A (Fig. 4).

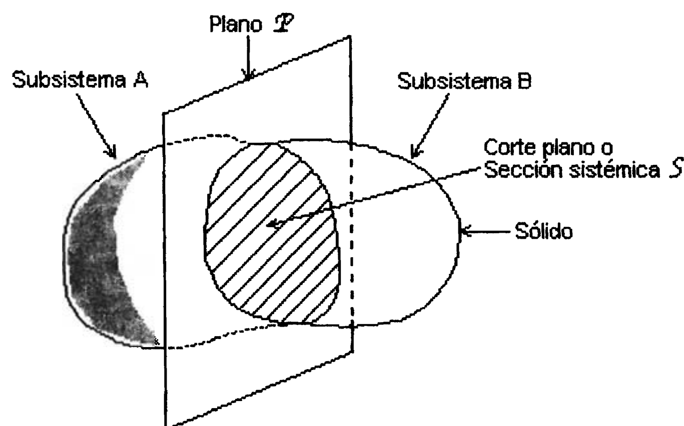


Fig. 2. Sección S practicada por un plano P (área rayada).

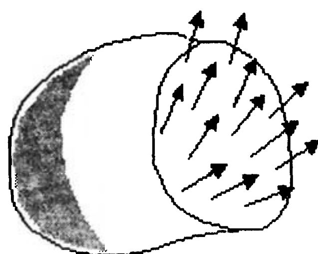


Fig. 3. Distribución de fuerzas en la sección S del subsistema A.

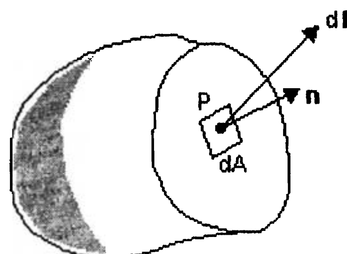


Fig. 4. Con respecto a la definición de esfuerzo.

(El subsistema B quedará caracterizado por el vector opuesto $-\hat{\mathbf{n}}$).

Tomemos un elemento de área dA ubicado en un punto arbitrario P de la sección S, y sea **dF** la fuerza sobre este elemento. Se define el esfuerzo en P, correspondiente a la sección S (o equivalentemente a la orientación $\hat{\mathbf{n}}$), por la expresión

(2) $$\mathbf{S}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{P}) \equiv \frac{d\mathbf{F}}{dA} \qquad \left(\text{Unidades } \frac{\text{newton}}{(\text{metro})^2} = \text{pascal} = \text{Pa}\right)$$

La fuerza sobre dicho elemento ubicado en P es pues

(3) $$d\mathbf{F} = \mathbf{S}^{(\mathbf{n})}\, dA$$

II.2 Características generales del vector esfuerzo

(a) El (vector) esfuerzo es una cantidad vectorial definida localmente en cualquier punto del interior del sólido; o sea, es una función vectorial de la posición. Sin embargo, el esfuerzo en un punto arbitrario P no queda determinado si no se especifica además alguna sección sistémica (caracterizada por un vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$) trazada a través de P. Esto es, el punto P se imagina en la frontera entre dos subsistemas del material, separados éstos por la sección sistémica (Fig. 5). Esta sección puede ser una superficie alabeada.

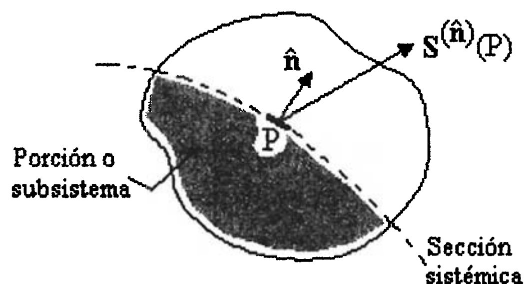


Fig. 5

(b) Por un mismo punto P pueden trazarse innumerables secciones sistémicas; en otras palabras, el punto P puede pertenecer a una infinidad de posibles subsistemas del material. Sin embargo, la propiedad de localidad del esfuerzo $\mathbf{S}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{P})$ significa que su valor no depende de la forma de la sección sistémica lejos del punto P. Así pues, si consideramos dos subsistemas distintos C y C′, con fronteras respectivas diferentes S y S′ que contienen ambas a P (Fig. 6), y si S y S′ poseen en P el mismo plano tangente, de modo que sus vectores normales $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}'$ coincidan en P, entonces sus respectivos vectores esfuezo también coinciden en P.

Esta propiedad es consecuencia del alcance tan corto de las fuerzas internas. De hecho, sólo unas cuantas capas moleculares a uno y otro lado de la frontera sistémica, las más próximas, son las responsables de la fuerza de interacción **dF**.

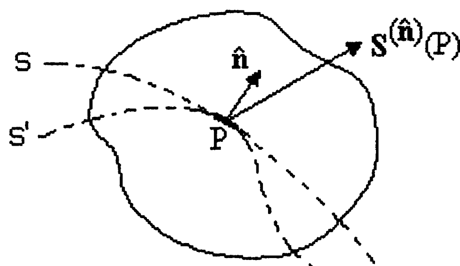


Fig. 6

(c) Los esfuerzos $S^{(n)}(P)$ y $S^{(n')}(P)$, asociados con el mismo punto P pero con vectores normales distintos $\hat{n}$ y $\hat{n}'$, pueden corresponder a dos subsistemas radicalmente distintos (Fig. 7). Es decir, al variar $\hat{n}$, manteniendo P fijo, estamos modificando (aunque sea sólo localmente) los subsistemas cuya interacción en la vecindad de P determina el esfuerzo en P. Se ve claramente que el esfuerzo depende de *dos* cosas: el punto P, y el vector unitario $\hat{n}$.

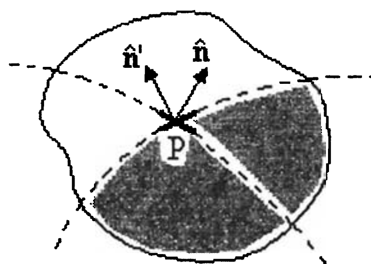


Fig. 7

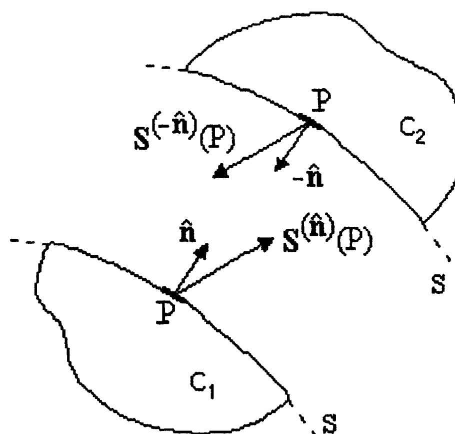


Fig. 8

(d) Sean C_1 y C_2 los subsistemas generados por una frontera sistémica S (Fig. 8). Cualquier punto de S puede suponerse perteneciente a ambos subsistemas. Al hacer el diagrama de cuerpo libre ya sea de C_1 o de C_2 figurará a través de la frontera sistémica el campo de esfuerzos. En particular figurará en el punto P la fuerza de interacción local entre ambos subsistemas. Se cumple la tercera ley de Newton, por lo que

$$S^{(n)}(P)da = -S^{(-n)}(P)\,da$$

o bien

(4) $$S^{(n)}(P) = -S^{(-n)}(P)$$

(e) El esfuerzo se define también, por conveniencia, en la superficie exterior del material. Ello se hace de tal manera que el esfuerzo correspondiente a una sucesión de puntos interiores que converja hacia un punto de la superficie exterior tienda hacia el valor de la densidad de fuerza externa aplicada en dicho punto. Si en tal punto no existe fuerza externa tendremos que S(P) = 0. Por otra parte, si existe una fuerza externa concentrada en P, el esfuerzo posee allí una singularidad, la cual puede manejarse matemáticamente sustituyéndola por una densidad de fuerza de dominio muy corto.

II.3 Campo de esfuerzos sobre superficies coordenadas

Muchas de las secciones sistémicas de interés que se practican al material tienen la forma de las superficies ortogonales naturales del sistema de coordenadas empleado: planos x = constante, y = constante y z = constante en el caso del sistema cartesiano; planos r = constante, θ = constante y z = constante en el caso de coordenadas cilíndricas, etc. Los vectores normales de tales superficies coinciden con los versores de la base ortonormal propia del sistema: {**i**, **j**, **k**}, {$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$}, etc.

Consideremos un sistema cartesiano. En la Fig. 9 se muestra el material seccionado sistémicamente a través de uno de sus puntos P. La sección, la cual es plana y perpendicular al eje X, segmenta el cuerpo en dos subsistemas. El subsistema objeto de análisis es el delineado con líneas sólidas. El plano achurado se denomina "*cara* X *positiva*" porque el vector normal que le corresponde (dirigido hacia fuera del subsistema considerado) es el unitario **i** (una "*cara* X *negativa*" corresponde al vector normal –**i**). Análogamente podríamos considerar subsistemas con caras Y y caras Z positivas y negativas, generados por secciones paralelas a los planos coordenados XZ y XY, respectivamente.

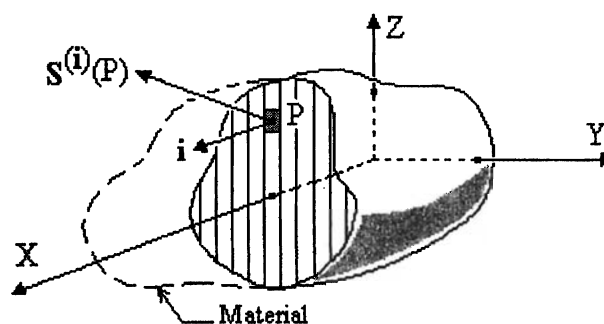


Fig. 9

Conviene descomponer al vector $\mathbf{S}^{(i)}$ en sus componentes cartesianas en la forma:

$$\mathbf{S}^{(i)} \equiv \sigma_{xx}\,\mathbf{i} + \sigma_{xy}\,\mathbf{j} + \sigma_{xz}\,\mathbf{k} \equiv \sigma_{11}\,\mathbf{i} + \sigma_{12}\,\mathbf{j} + \sigma_{13}\,\mathbf{k}$$

El primer índice de las σ's (o sea "x" ó "1") indica que se trata de la "cara X", y el segundo índice denota la dirección de la componente vectorial (a lo largo de X, Y y Z). Es más común emplear la notación más descriptiva siguiente:

(5a) $$\mathbf{S}^{(i)} \equiv \sigma_x\,\mathbf{i} + \tau_{xy}\,\mathbf{j} + \tau_{xz}\,\mathbf{k}$$

La componente σ_x actúa perpendicularmente a la cara X y se denomina "*esfuerzo normal*"; las otras dos componentes, τ_{xy} y τ_{xz}, actúan en el plano de dicha cara y se denominan "*esfuerzos cortantes*" (o de cizalladura).

Para los otros dos tipos de caras existen notaciones análogas:

(5b) $$\mathbf{S}^{(\mathbf{j})} \equiv \tau_{yx}\,\mathbf{i} + \sigma_y\,\mathbf{j} + \tau_{yz}\,\mathbf{k} = \sigma_{21}\,\mathbf{i} + \sigma_{22}\,\mathbf{j} + \sigma_{23}\,\mathbf{k}$$

(5c) $$\mathbf{S}^{(\mathbf{k})} \equiv \tau_{zx}\,\mathbf{i} + \tau_{zy}\,\mathbf{j} + \sigma_z\,\mathbf{k} = \sigma_{31}\,\mathbf{i} + \sigma_{32}\,\mathbf{j} + \sigma_{33}\,\mathbf{k}$$

En el sistema de coordenadas cilíndricas r, θ, z las superficies ortogonales θ = const. y z = const. son planas, y la superficie ortogonal r = const. es cilíndrica. Existen unas designaciones análogas a las del sistema cartesiano. Por ejemplo, una "cara θ positiva" es un plano cuyo vector normal es el vector básico $\mathbf{e}_\theta$; si el vector normal es $-\,\mathbf{e}_\theta$, la cara se denomina cara θ negativa. En la Fig. 10 se muestra un ejemplo.

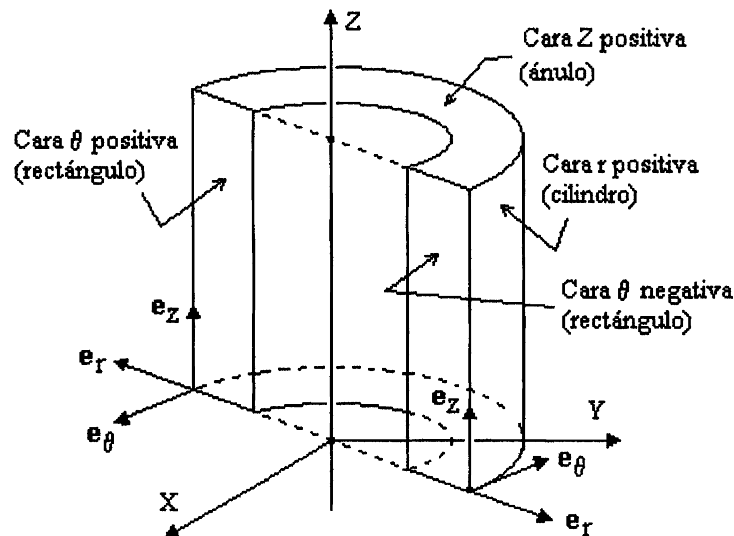


Fig. 10

Los esfuerzos correspondientes a las caras citadas se escriben

(6a) $$\mathbf{S}^{(\mathbf{e}_r)} \equiv \sigma_r\,\mathbf{e}_r + \tau_{r\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \tau_{rz}\,\mathbf{e}_z$$

(6b) $$\mathbf{S}^{(\mathbf{e}_\theta)} \equiv \tau_{\theta r}\,\mathbf{e}_r + \sigma_\theta\,\mathbf{e}_\theta + \tau_{\theta z}\,\mathbf{e}_z$$

(6c) $$\mathbf{S}^{(\mathbf{e}_z)} \equiv \tau_{zr}\,\mathbf{e}_r + \tau_{z\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \sigma_z\,\mathbf{e}_z$$

Demostraremos en el siguiente apartado que las σ_{ij}'s forman las componentes de un tensor de segundo orden. Este tensor se denomina el "tensor de esfuerzos".

II.4 ESTADO DE ESFUERZOS

Conocer el "estado de esfuerzos" en un punto P cualquiera en el seno del sólido significa poder calcular el esfuerzo $\mathbf{S}^{(\hat{\mathbf{n}})}$ en el punto P, correspondiente a *cualquier* sección sistémica plana descrita por un unitario normal $\hat{\mathbf{n}}$.

Demostraremos a continuación que el esfuerzo $\mathbf{S}^{(\hat{\mathbf{n}})}$ se puede obtener a partir de los esfuerzos $\mathbf{S}^{(\mathbf{i})}$, $\mathbf{S}^{(\mathbf{j})}$ y $\mathbf{S}^{(\mathbf{k})}$ en P, correspondientes a secciones planas paralelas a los planos coordenados de un sistema cartesiano XYZ. En la Fig. 11 se muestran estas secciones en el punto P.

Supongamos que el punto P, ubicado por conveniencia en el origen de coordenadas, es un vértice de un tetraedro OABC que posee tres caras OBC, OAC, OAB orientadas según los planos YZ, ZX y XY, respectivamente y una cara oblicua ABC, como se muestra en la Fig. 12. Imaginemos que este tetraedro es un pequeño trozo de material dentro del sólido, el cual suponemos en equilibrio.

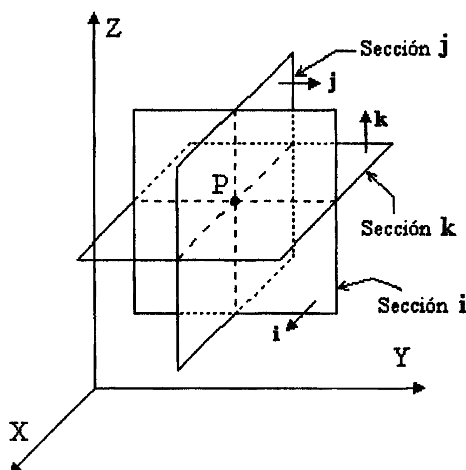


Fig. 11

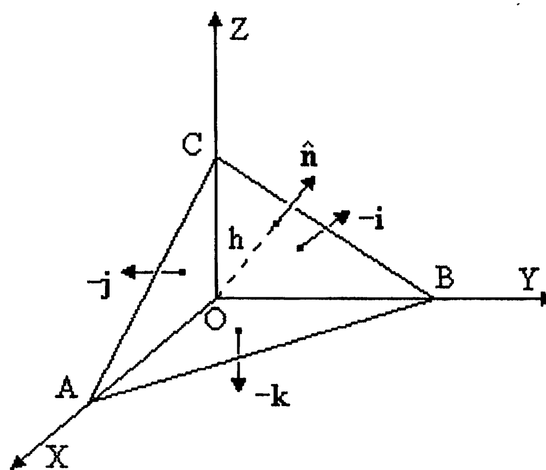


Fig. 12

Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la cara oblicua, dirigido hacia fuera del tetraedro. Como vemos, el tetraedro está formado por tres secciones, con vectores unitarios normales $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$ y $-\mathbf{k}$ que apuntan hacia fuera del tetraedro, y además por una sección o cara oblicua, la "sección $\hat{\mathbf{n}}$". Sea "h" la altura del tetraedro, trazada desde O hasta la cara oblicua.

Procederemos a plantear la ecuación de equilibrio del tetraedro, suponiendo que sus dimensiones son muy pequeñas, y que existe en el interior del sólido una distribución volúmica de fuerzas descrita por la densidad de fuerza $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, medida en newton/(metro)^3. Esta $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ puede ser simplemente el peso del cuerpo.

La ecuación de equilibrio comprende las fuerzas que actúan sobre las cuatro caras del tetraedro, junto con la fuerza volúmica. Entonces,

$$\mathbf{S}^{(-\mathbf{i})}\,dA_x + \mathbf{S}^{(-\mathbf{j})}\,dA_y + \mathbf{S}^{(-\mathbf{k})}\,dA_y + \mathbf{S}^{(\mathbf{n})}\,dA + \mathbf{f}\,dV = 0$$

En ella, dA_x, dA_y y dA_z son las áreas de las caras cuyas normales son $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$ y $-\mathbf{k}$, respectivamente, y dA es el área de la cara oblicua.

Ahora bien, el vector área de la cara oblicua es

(7) $$\mathbf{dA} = dA\,\mathbf{n} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{n} \equiv \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

Se tiene entonces $dA_x = dA\cos\alpha$, $dA_y = dA\cos\beta$ y $dA_z = dA\cos\gamma$. Por otra parte, el volumen del tetraedro es $dV = \frac{1}{3}h\,dA$, de tal modo que la ecuación de equilibrio se vuelve

$$\mathbf{S}^{(-\mathbf{i})}\,dA\cos\alpha + \mathbf{S}^{(-\mathbf{j})}\,dA\cos\beta + \mathbf{S}^{(-\mathbf{k})}\,dA\cos\gamma + \mathbf{S}^{(\mathbf{n})}\,dA + \mathbf{f}\,(\tfrac{1}{3}h\,dA) = 0$$

Cancelando el factor dA y tomando en cuenta que

$$\mathbf{S}^{(-\mathbf{i})} = -\,\mathbf{S}^{(\mathbf{i})} \qquad \mathbf{S}^{(-\mathbf{j})} = -\,\mathbf{S}^{(\mathbf{j})} \qquad \mathbf{S}^{(-\mathbf{k})} = -\,\mathbf{S}^{(\mathbf{k})}$$

resulta

$$-\,\mathbf{S}^{(\mathbf{i})}\cos\alpha - \mathbf{S}^{(\mathbf{j})}\cos\beta - \mathbf{S}^{(\mathbf{k})}\cos\gamma + \mathbf{S}^{(\mathbf{n})} + \mathbf{f}\,(\tfrac{1}{3}h) = 0$$

Encogiendo el tetraedro de modo que se colapse al origen, o sea haciendo $h \to 0$, los esfuerzos quedan evaluados en un mismo punto, el origen de coordenadas, y el término de la fuerza volúmica desaparece. Obtenemos el resultado

(8) $$\mathbf{S}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{S}^{(\mathbf{i})}\cos\alpha + \mathbf{S}^{(\mathbf{j})}\cos\beta + \mathbf{S}^{(\mathbf{k})}\cos\gamma$$

Esto demuestra que el esfuerzo asociado con una cara oblicua arbitraria se puede calcular a partir de los esfuerzos asociados con caras paralelas a los planos coordenados.

Daremos a (8) una forma más reveladora y más práctica para el cálculo. Empleando las representaciones (5a,b,c) escribimos (8) por componentes en la forma

$$[\mathbf{S}^{(\mathbf{n})}]_x \equiv S_x^{(\mathbf{n})} = \sigma_x\cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma$$

$$[\mathbf{S}^{(\mathbf{n})}]_y \equiv S_y^{(\mathbf{n})} = \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma$$

$$[\mathbf{S}^{(\mathbf{n})}]_z \equiv S_z^{(\mathbf{n})} = \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma$$

Esto lo podemos poner en forma matricial así:

(9) $$\begin{pmatrix} S_x^{(n)} \\ S_y^{(n)} \\ S_z^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

En la notación tensorial,

(10) $$S_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$$

Multipliquemos ambos miembros de (10) por la diferencial de área. Usando las relaciones $d\mathbf{F} = \mathbf{S}^{(n)}\, dA$ y $d\mathbf{A} = \mathbf{n}\, dA$ tenemos

(11) $$dF_i = \sigma_{ij}\, dA_j$$

De aquí se sigue el carácter tensorial de las σ_{ij}'s, puesto que $d\mathbf{F}$ y $d\mathbf{A}$ son vectores.

Conviene ver al tensor σ_{ij} como un operador que, aplicado sobre el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, produce el vector esfuerzo correspondiente a una sección definida por el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$. Esto es lo que dice la ecuación (10), la cual escrita en forma matricial es

(12) $$S = \sigma n$$

con

(13) $$S = \begin{pmatrix} S_x^{(n)} \\ S_y^{(n)} \\ S_z^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad n = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

En la matriz σ hemos puesto de una vez $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ y $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, cosa que demostraremos posteriormente. El tensor de esfuerzos es simétrico.

Los elementos del tensor de esfuerzos, o equivalentemente de la "matriz de esfuerzos", son en general funciones de la posición. Conocer el estado de esfuerzos en un punto significa conocer la matriz de esfuerzos en ese punto.

El estado de esfuerzos se denomina *plano* si no existe fuerza interna alguna en la dirección del eje Z, es decir, si $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$. Constituye un caso que se presenta frecuentemente en las aplicaciones.

II.5 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN ESTADO DE ESFUERZOS PLANO

La matriz de esfuerzos correspondiente a un estado de esfuerzos plano (o bidimensional) tiene la forma general

$$(14) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

Semejante estado se representa gráficamente tal como se ve en la Fig. 13. Si bien esta figura no es un diagrama de cuerpo libre, puede pensarse que representa a su vez el diagrama de cuerpo libre de un pequeño prisma rectangular de dimensiones dx, dy, dz localizado en el punto P(x, y, z) (Fig. 14). En esta concepción se desprecia la fuerza volúmica sobre este prisma infinitesimal, así como la variación a primer orden del valor de los esfuerzos σ_x y τ_{xy} al pasar de la posición (x, y) a la posición (x + dx, y + dy).

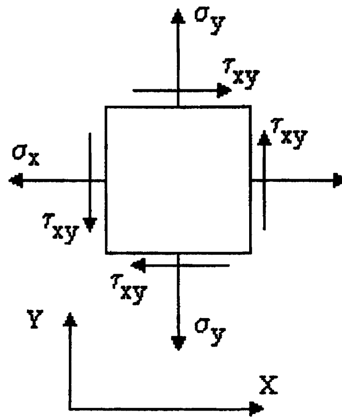


Fig. 13

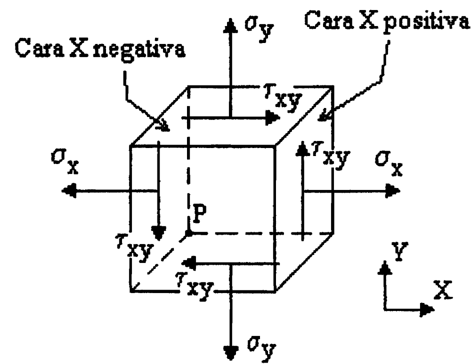


Fig. 14

Cada esfuerzo mostrado en la Fig. 14 debe multiplicarse por el área de la cara sobre la que actúa, con objeto de que las flechas representen fuerzas. Note que las fuerzas normales y cortantes sobre la cara X negativa son las negativas de las fuerzas sobre la cara X positiva. Lo mismo con respecto a las caras Y. Esto proviene de la propiedad (4).

En un diagrama de cuerpo libre exacto de este prisma infinitesimal habría que suponer fuerzas normales $\sigma_x(x, y, z)dydz$ y $\sigma_x(x + dx, y + dy, z + dz)dydz$ sobre las caras X negativa y positiva, respectivamente, así como también fuerzas cortantes $\tau_{xy}(x, y, z)dydz$ y $\tau_{xy}(x + dx, y + dy, z + dz)dydz$ sobre dichas caras. Análogamente se haría con respecto a las caras Y positiva y negativa. Asimismo habría que incluir una fuerza volúmica dada por f(x, y, z)dxdydz. Igualando a cero la suma de momentos de las fuerzas con respecto al centro del cubo se demuestra que las fuerzas cortantes τ_{xy} y τ_{yx} deben ser iguales. De allí la propiedad de simetría del tensor de esfuerzos.

II.6 Ecuación de equilibrio de un cuerpo material

Consideremos un cuerpo C en equilibrio. En el interior del cuerpo definamos un subsistema mediante una frontera sistémica cerrada S (Fig. 15). Supongamos que el cuerpo entero está sometido a una fuerza volúmica cuya densidad de fuerza es **f** (medida en newtons por metro cúbico). Esta **f** puede ser simplemente el peso del cuerpo.

Planteemos la ecuación de equilibrio estático del subsistema. Éste se encuentra sometido a una distribución de fuerza superficial que actúa sobre su frontera S, y que se debe a la porción circundante del cuerpo C, y además a una distribución de fuerza volúmica.

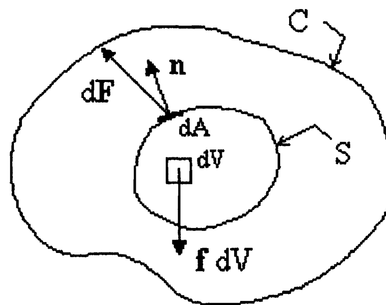


Fig. 15

Dado que sobre un elemento de área dA actúa una fuerza dF = S(n) dA, donde n es la dirección del vector área dA, tendremos para la fuerza total debida a la distribución superficial la expresión

$$\oint_S d\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{S}^{(\mathbf{n})} dA = \oint_S \sigma_{ij} dA_j$$

Por otra parte, la fuerza volúmica total sobre el subsistema es

$$\int_R \mathbf{f}\, dV$$

donde R es la región espacial ocupada por el subsistema. Tenemos entonces la ecuación de equilibrio

$$\oint_S \sigma_{ij} dA_j + \int_R f_i\, dV = 0$$

Ahora bien, la integral sobre la frontera S se puede convertir a una integral sobre la región R empleando el teorema de Gauss. Resulta

$$\int_R \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_R f_i\, dV = 0$$

En virtud de que esta relación es válida para cualquier región R se deduce que

(15) $$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

Esta ecuación diferencial parcial es la ecuación de equilibrio buscada.

II.7 TRANSFORMACIÓN DEL TENSOR DE ESFUERZOS

Consideremos la siguiente cuestión, en relación con un estado de esfuerzos plano.

Dados los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} en un punto, relativos a un sistema cartesiano XY, ¿cuáles son los esfuerzos σ'_x, σ'_y y τ'_{xy} relativos a otro sistema X'Y' que se obtiene girando el sistema XY un ángulo θ alrededor del eje Z?

La respuesta la podemos obtener transformando la matriz de esfuerzos como se transforma todo tensor de segundo orden. La matriz de transformación es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Entonces, de acuerdo con la ley

$$\sigma'_{ij} = a_{im} a_{jn} \sigma_{mn}$$

En forma matricial,

$$\sigma' = A\sigma\tilde{A}$$

Efectuando el producto indicado en el miembro derecho se llega a

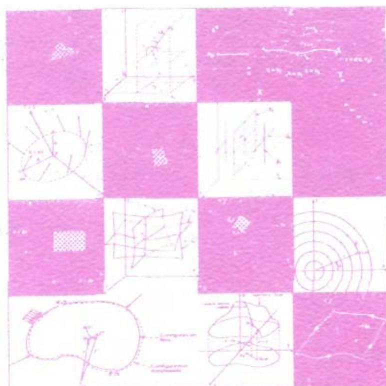
(16)
$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$
$$\sigma_{y'} = \sigma_x \operatorname{sen}^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$
$$\tau_{x'y'} = 2(\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES

Se terminó
de imprimir
en el mes de octubre
del año 2000
en los talleres
de la Sección
de Impresión
y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco.

La edición estuvo
a cargo
de la Sección
de Producción
y Distribución Editoriales.

Se imprimieron
200 ejemplares
más sobrantes
para reposición.




0092101 33632
53.00 - $ 53 .00

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas